

TECANA AMERICAN UNIVERSITY
Accelerated Degree Program
Bachelor of Science in Mechanical Engineering



INFORME N° 4

Vibraciones Mecánicas

Autor:

Balmore Brito

“Por la presente juro y doy fe que soy el único autor del presente informe y que su contenido es fruto de mi trabajo, experiencia e investigación académica”.

Londres 18 de Diciembre, 2008

INDICE

INDICE	2
INTRODUCCION	4
OBJETIVO GENERAL	5
OBJETIVOS ESPECÍFICOS	5
1. LAS VIBRACIONES MECÁNICAS	6
1.1 DEFINICIÓN E IMPORTANCIA DEL ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES MECÁNICAS	6
1.1.1 GRADOS DE LIBERTAD	7
1.2 CLASIFICACIÓN DE LAS VIBRACIONES MECÁNICAS	7
1.2.1 VIBRACIÓN LIBRE NO AMORTIGUADAS	7
1.2.2 VIBRACIÓN FORZADA	7
1.2.3 VIBRACIÓN AMORTIGUADA	7
1.2.4 VIBRACIÓN NO AMORTIGUADA:	7
1.2.5 VIBRACIÓN LINEAL:	8
1.2.6 VIBRACIÓN NO LINEAL:	8
2. EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE.....	8
2.1 ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO	8
2.2 ENERGÍA.....	9
2.3 INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN.....	10
3. VIBRACIONES EN 2 DIMENSIONES	11
4. VIBRACIONES CON AMORTIGUAMIENTO	13
4.1 ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO	13
4.2 INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN.....	14
5. VIBRACIONES FORZADAS	19
5.1 ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO	19
5.2 INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN.....	19
6. AMPLIFICACIÓN DINÁMICA Y RESONANCIA	23
7. EL ESPACIO DE LAS FASES.....	28
8. ANÁLISIS MEDIANTE SERIES DE FOURIER	30
8.1 CARÁCTER LINEAL DE LAS ECUACIONES.....	30
8.2 ANÁLISIS DE SERIES DE ARMÓNICOS	31
8.3 DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER	32
9. ANÁLISIS DE TRANSITORIOS MEDIANTE LA FUNCIÓN DE GREEN.....	34

9.1 RESPUESTA A UNA FUNCIÓN IMPULSO.....	34
10. ANÁLISIS DE TRANSITORIOS PARA UNA EXCITACIÓN ARBITRARIA.....	36
11. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INTEGRACIÓN DIRECTA	37
11.1 MÉTODO DE EULER.....	38
11.2 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA	39
12. AISLAMIENTO VIBRATORIO	40
CONCLUSIONES	42
BIBLIOGRAFIA	43

INTRODUCCION

Es muy común que el objetivo de un diseño mecánico sea una estructura o un mecanismo que permanezca cerca de una posición de equilibrio estable, pudiendo realizar sin embargo pequeños movimientos o vibraciones alrededor de esa posición. Una variante sería un sistema cuyo movimiento objetivo sea una trayectoria determinada, admitiendo pequeñas vibraciones o variaciones acotadas respecto de la misma.

Las solicitaciones y la respuesta de un sistema debido a cargas dinámicas pueden superar notablemente los efectos de las mismas cargas en condiciones estáticas, aplicadas de forma suficientemente lenta. Los diseños de ingeniería cada vez requieren mas una adecuada respuesta dinámica. Esto puede deberse a que las cargas realmente se apliquen de forma muy rápida, como a asignar una mayor importancia a aspectos como el mantenimiento de la funcionalidad, la resistencia y el confort ante las vibraciones. Estas condiciones de diseño a menudo se añaden a las puramente estáticas, de estabilidad y resistencia en la posición de equilibrio. En la mayoría de los casos prácticos, estas pequeñas Vibraciones se pueden considerar como “lineales” (mas adelante se precisa el significado de este termino) pudiéndose analizar mediante la teoría que se expone en este informe. Comenzamos aquí por los casos más simples de vibración, los de sistemas con 1 grado de libertad. Aunque en la realidad casi todos los casos tienen varios grados de libertad, en numerosas situaciones existe un grado de libertad predominante, pudiéndose despreciar los otros “modos de vibración” en una primera aproximación. Será valido en estos casos el estudio mediante las técnicas que se presentaran en este informe; en cualquier caso, serán la base para el estudio de las vibraciones mecánicas enmarcadas por sistemas de uno o varios grados de libertad.

OBJETIVO GENERAL

Conocer y aplicar los métodos de análisis dinámico y de pequeñas vibraciones en sistemas con un grado de libertad; conocer y aplicar los métodos de la dinámica analítica; desarrollar una capacidad de análisis aplicando los modelos matemáticos de la mecánica a la resolución de problemas prácticos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Entender la definición de las vibraciones mecánicas y su efecto en el buen funcionamiento de las maquinarias.
- Comprender los conceptos fundamentales de las vibraciones mecánicas.
- Conocer los diferentes sistemas de unidades empleados en el estudio de las vibraciones.
- Entender todo lo referente a parámetros a considerar en el análisis de las vibraciones.
- Comprender la definición de frecuencia, periodo, onda, espectro, longitud de onda, amplitud de onda, vibraciones libres y forzadas etc.
- En general entender la base teórica para el diseño de elementos e instrumentos que permiten realizar análisis de vibraciones en maquinarias.

1. Las Vibraciones Mecánicas

1.1 Definición e Importancia del Estudio de las Vibraciones Mecánicas

Cualquier movimiento que se repite a si mismo en intervalos de tiempo es considerado oscilación o vibración. La teoría de vibraciones estudia este tipo de movimientos y las fuerzas asociadas con los mismos. Los sistemas vibratorios tienen, en general, un medio que almacena energía potencial (resorte o elastómero), un medio que almacena energía cinética (masa o inercia) y un medio a través del cual se disipa energía en forma gradual (amortiguador).

La vibración de un sistema implica la transferencia de su energía potencial a energía cinética y la de su energía cinética a energía potencial alternadamente. Si el sistema está amortiguado, la energía se irá disipando en cada ciclo de vibración.

El estudio de las vibraciones mecánicas también llamado, mecánica de las vibraciones, es una rama de la mecánica o más generalmente de la ciencia que estudia los movimientos oscilatorios de los cuerpos o sistemas y de las fuerzas asociadas a ellas. Vibración se define como es el movimiento de vaivén de las moléculas de un cuerpo o sistema debido a que posee características energéticas cinéticas y potenciales.

Desde que aparecieron los primeros instrumentos musicales, en especial los de cuerda, la gente ya mostraba un interés por el estudio del fenómeno de las vibraciones, por ejemplo, Galileo encontró la relación existente entre la longitud de cuerda de un pendulo y su frecuencia de oscilación, además encontró la relación entre la tensión, longitud y frecuencia de vibración de las cuerdas.

Estos estudios y otros posteriores ya indicaban la relación que existe entre el sonido y las vibraciones mecánicas. El buen funcionamiento de los amortiguadores de un automóvil. El mal aislamiento de maquinaria que pueda dañar la infraestructura de la misma y zona aledaña, ruido causada por maquinaria. Son ejemplos de algunos ejemplos. Un fenómeno de la cual las maquinas temen es la llamada resonancia, cuyas consecuencias pueden ser serias.

Por otro lado el buen funcionamiento de la maquinaria industrial es un fenómeno que requiere de una constante inspección, es decir, el mantenimiento predictivo; este juega un papel importante en el crecimiento económico de una empresa, ya que predecir una falla es sinónimo de programación de eventos que permite a la empresa decidir el momento adecuado para detener la maquina y darle el mantenimiento.

El análisis de vibración juega un papel importante en el mantenimiento predictivo, este consiste en tomar medida de vibración en diferentes partes de la maquina permitiendo de esta forma, al utilizar modernos programas de computación, los cuales han sido diseñados basados en teorías físicas y

matemáticas, el análisis detallado de tales informaciones de campo. El análisis adecuado y experto permitirá predecir posibles fallas en equipos y facilitara la labor de mantenimiento, reduciendo de esta forma las paradas imprevistas de equipos y las perdidas en la producción.

1.1.1 Grados de libertad

Es el mínimo número de coordenadas independientes necesarias para determinar completamente las posiciones de todas las partes de un sistema en cualquier instante.

1.2 Clasificación de las Vibraciones Mecánicas

1.2.1 Vibración libre no amortiguadas

Las vibraciones libres no amortiguadas son las que se producen en ausencia de fuerzas disipativas, por lo que una vez iniciadas, las Vibraciones se mantienen en forma indefinida.

1.2.2 Vibración forzada

Es cuando un sistema vibra debida a una excitación constante. Esta importante clasificación nos dice que un sistema vibra libremente solo y solo si existen condiciones iniciales, ya sea que suministremos la energía por medio de un pulso (energía cinética) o debido a que posee energía potencial, por ejemplo deformación inicial de un resorte.

Esta energía es disipada por el fenómeno llamado amortiguación, el cual en ocasiones es despreciable.

1.2.3 Vibración amortiguada

Si existe perdida de energía durante un movimiento oscilatorio, la vibración presente se denomina vibración amortiguada. En muchos sistemas físicos, la cantidad de amortiguamiento es tan pequeña que puede despreciarse para fines prácticos. Sin embargo, el considerar el amortiguamiento es sumamente importante cuando se analizan sistemas de vibración cercanos a resonancia

1.2.4 Vibración no amortiguada:

Si durante un movimiento oscilatorio no se pierde energía en fricción o cualquier otro tipo de resistencia, la vibración se conoce como vibración no amortiguada

El amortiguamiento es un sinónimo de la pérdida de energía de sistemas vibratorios. Este hecho puede aparecer como parte del comportamiento interno de un material, de rozamiento, o bien, un elemento físico llamado amortiguador.

1.2.5 Vibración lineal:

Si los componentes básicos de un sistema tienen un comportamiento lineal la vibración resultante es lineal. Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del sistema son lineales y en consecuencia el principio de superposición puede ser empleado, además existen fundamentos matemáticos para sus análisis completamente desarrollados.

1.2.6 Vibración no lineal:

Se produce si alguno de sus componentes se comporta como no lineal. El comportamiento lineal de un elemento facilita su estudio, en la realidad todo elemento se comporta como no lineal pero los resultados de su estudio no difieren, en su mayoría, a los realizados si se consideran como elementos lineales. Un ejemplo de ello es el resorte, donde según la ley de Hooke el comportamiento fuerza deformación es lineal.

2. El Oscilador Armónico Simple

2.1 Ecuación del Movimiento

Sea una masa puntual m , obligada a moverse según una recta fija, sujeta a un punto dado de la misma por medio de un resorte elástico (es decir, un muelle que ejerce una fuerza proporcional a su elongación), de constante k , sin que existan otras fuerzas aplicadas. Si se denomina x la coordenada de m a lo largo de la recta, el resorte elástico ejerce una fuerza recuperadora, que se opone a la elongación, de valor

$$F = -k(x - x_0),$$

Siendo x_0 la que se denomina longitud natural del resorte, para la cual este quedaría sin tensión. El signo ha de ser negativo puesto que la fuerza del resorte tiene sentido contrario a la elongación, es decir, es una resistencia interna que se opone a ella. Se dice que se trata de un resorte lineal, porque la fuerza desarrollada en el mismo depende linealmente de la elongación: a doble elongación, doble fuerza y a elongación mitad, la fuerza se divide por dos.

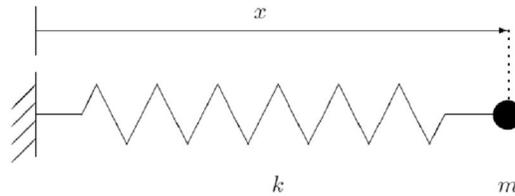


Figura 1: Oscilador armónico simple

Como se puede elegir el origen de coordenadas donde plazca, se hará en el punto x_0 , de forma que la expresión de la fuerza del muelle sea

$$F = -kx.$$

Aplicando el principio de la cantidad de movimiento, se obtiene la ecuación dinámica de este sistema:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \quad (1)$$

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria con las siguientes características:

- De segundo orden, ya que intervienen derivadas segundas;
- Lineal, ya que así es la dependencia en relación con la variable x y sus derivadas;
- De coeficientes constantes, pues supondremos fijos m (masa del sistema) y k (rigidez del resorte);
- Homogénea, pues la ecuación esta igualada a cero, sin termino independiente a la derecha del signo igual.

2.2 Energía

Antes de proceder a integrar la ecuación, conviene analizar la energía asociada al resorte. La fuerza del muelle es conservativa, asociada a un potencial $V(x)$. Este se calcula inmediatamente integrando el trabajo realizado por aquella entre la posición natural y una posición genérica:

$$V = - \int_0^x F dx = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Al ser la fuerza conservativa, la energía total se conserva, siendo su valor en un instante genérico

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (\text{cte.})$$

Si el movimiento es oscilatorio y acotado, la elongación $x(t)$ tendrá máximos en los que la derivada es nula ($\dot{x} = 0$). Particularizando para uno de estos instantes, podemos escribir la ecuación (2) en función de una nueva constante A cuya interpretación es la elongación máxima:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (3)$$

Físicamente, podemos interpretar la ecuación anterior observando que en los puntos de elongación máxima toda la energía es potencial ($V_{max} = \frac{1}{2}kA^2$), mientras que en los puntos de elongación nula toda la energía es cinética ($T_{max} = \frac{1}{2}kA^2$). A lo largo del movimiento, la energía total se conserva, oscilando entre estas dos formas.

2.3 Integración de la Ecuación

El objetivo es resolver la ecuación (1), integrándola para obtener el movimiento $x(t)$. La forma mas sencilla es partir de la ecuación (3), despejando en ella y separando variables:

$$\dot{x}^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} dt = \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

La integración se puede hacer para cada miembro de esta ecuación de forma independiente, resultando:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi = \arcsen \frac{x}{A},$$

Donde φ es una constante de integración. Se define ahora un nuevo parámetro ω_0 como:

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4)$$

Con lo cual despejando el valor de x resulta la ecuación del movimiento buscada:

$$x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \varphi). \quad (5)$$

Esta ecuación define una ondulación armónica (es decir, sinusoidal). Se trata de un movimiento periódico, puesto que se repite idénticamente cada cierto intervalo de tiempo, denominado *periodo*, de manera indefinida. En este caso el periodo es $T = 2\pi/\omega_0$.

El parámetro ω_0 recibe el nombre de *pulsación o frecuencia angular natural* del sistema; representa la frecuencia angular con la que este oscila cuando se le separa de su posición de equilibrio y se le libera para que se mueva libremente. La constante A es la *amplitud* de la Vibración (modulo de la elongación máxima) y por ultimo φ es el ángulo de fase, ya que indica la fase de la senoide en que se sitúa el origen de tiempo.

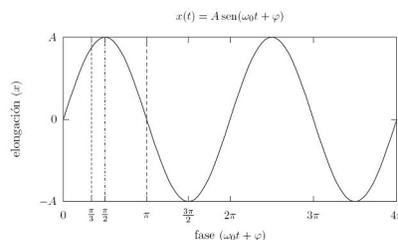


Figura 2: Vibración armónica, abarcando dos periodos completos del movimiento. Un ángulo de fase $\varphi \neq 0$ equivale simplemente a una traslación del origen de tiempos.

La frecuencia angular o pulsación se mide en radianes/segundo. La frecuencia circular f “o frecuencia propiamente dicha”, indica el número de ciclos o revoluciones por unidad de tiempo y se expresa mediante Hercios o ciclos por segundo (Hz). La relación entre ambas medidas de la frecuencia es por tanto $f = \omega/2\pi$. También es posible expresar la frecuencia en otras unidades como revoluciones por minuto (rpm).

Es inmediato observar de (5), que cuanto más rígido sea el muelle (mayor k) o más ligera la masa (menor m), mayor será la frecuencia natural de vibración ω_0 . Por el contrario, sistemas flexibles (k pequeño) y pesados (m grande) tendrán frecuencias naturales bajas.

Si el valor de la constante k fuese negativo, esto correspondería a una repulsión del resorte y no sería posible la solución anterior al no poderse obtener $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Físicamente, este caso no correspondería a un movimiento de vibración, ya que la partícula tendería a alejarse cada vez más del origen, sin estar su movimiento acotado. Por tanto, para que el sistema tenga un movimiento oscilatorio acotado ha de poseer una rigidez k positiva, correspondiente a una atracción hacia la posición de equilibrio estable.

Los dos parámetros A y φ quedan indeterminados en (5), siendo necesario calcularlos a partir de las dos condiciones iniciales (posición y velocidad iniciales). Por ejemplo, para una vibración que parte desde una elongación inicial a en reposo,

$$x_0 = a; \quad \dot{x}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = a, \quad \varphi = \pi/2.$$

Para unas condiciones iniciales cualesquiera x_0 y v_0 , particularizando (5) se halla:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0 x_0}{v_0} \right); \quad A = \frac{x_0}{\sin \varphi}.$$

Como comprobación, podemos evaluar la energía asociada al movimiento definido por (5). En un instante genérico, la velocidad es

$$\dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

Por lo que

$$T + V = \frac{1}{2} \underbrace{m\omega_0^2}_{=k} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2.$$

Como era de esperar se obtiene el mismo valor que en (3).

3. Vibraciones en 2 Dimensiones

Sea una masa m que se puede mover en un plano, atraída hacia un punto O del mismo por un resorte lineal.

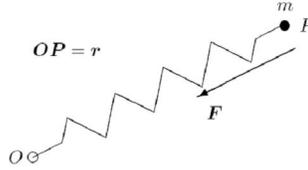


Figura 3: Vibraciones en 2D de una partícula atraída hacia un punto O del plano.

La expresión vectorial de la fuerza de atracción es:

$$\mathbf{F} = -kr,$$

Y la ecuación vectorial del movimiento es:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = \mathbf{0};$$

En componentes, tomando unos ejes Oxy en el plano, resultan dos ecuaciones escalares desacopladas:

$$m\ddot{x} + kx = 0; \quad m\ddot{y} + ky = 0. \quad (6)$$

La solución general de estas ecuaciones es

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad y = B \cos(\omega_0 t + \beta),$$

Expresiones que definen la trayectoria de forma paramétrica. Para obtener la ecuación implícita de la trayectoria tengamos en cuenta, en primer lugar, que podremos elegir el origen de tiempos sin pérdida de generalidad de forma que sea $\alpha = 0$; el ángulo de fase para y será $\delta = \beta - \alpha$ de esta forma queda:

$$x = A \cos(\omega_0 t); \quad y = B \cos(\omega_0 t + \delta).$$

Desarrollando la expresión de y y eliminando la variable t ,

$$y = B(\cos \omega_0 t \cos \delta - \text{sen } \omega_0 t \text{ sen } \delta),$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \delta - \text{sen } \delta \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

De donde se obtiene finalmente:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \delta = \text{sen}^2 \delta. \quad (7)$$

Para distintos valores de δ , esta ecuación representa una familia de elipses con orientación y excentricidad variables, siempre inscritas en el rectángulo $-A < x < A$, $-B < y < B$, como es fácil de comprobar. Las elipses degeneran en rectas diagonales para los casos límite $\delta = 0$ y $\delta = \pi$ (ver figura 4).

Una generalización interesante del caso anterior resulta de considerar una constante de atracción distinta según cada uno de los dos ejes (k_x y k_y respectivamente). Realizando esta modificación en las ecuaciones (6) es inmediato comprobar que su solución son vibraciones en x e y con distinta frecuencia,

$$\omega_x = \sqrt{k_x/m} \text{ y } \omega_y = \sqrt{k_y/m};$$

$$x = A \cos(\omega_x t + \alpha), \quad y = B \cos(\omega_y t + \beta).$$

Las trayectorias descritas son las llamadas curvas de *Lissajous* (figura 5). Estas curvas son cerradas tan sólo si ω_y/ω_x es una fracción racional. En caso contrario, se describen trayectorias abiertas que, a lo largo del tiempo, acaban siendo densas en el rectángulo $]-A, A[\times]-B, B[$ (pasan tan cerca como se desee de cualquier punto), sin cerrarse nunca.

La trayectoria seguida es sensible a las perturbaciones de los parámetros iniciales; una pequeñísima variación de ω_x u ω_y , convertirá a una curva de cerrada en abierta, por ejemplo.

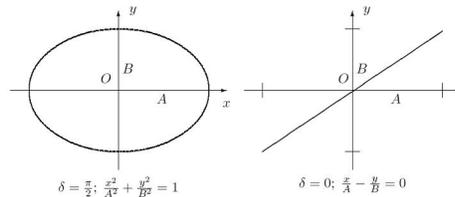


Figura 4: Trayectorias de una partícula con atracción elástica a un punto O , mostrando dos casos extremos de la familia de elipses (7).

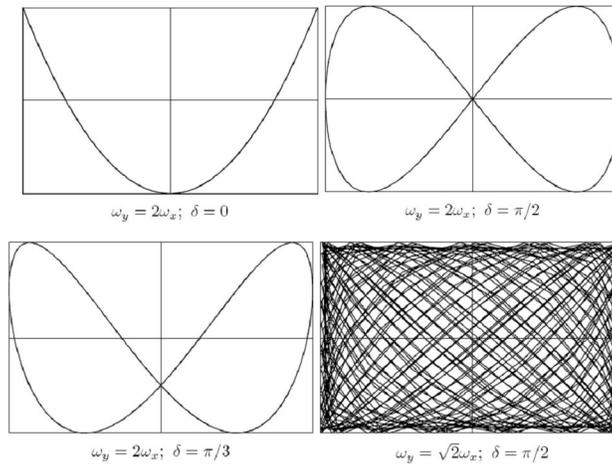


Figura 5: Curvas de *Lissajous*, para diversas condiciones iniciales. En e último caso, al no ser el cociente de frecuencias racional, la curva no es cerrada.

4. Vibraciones con amortiguamiento

4.1 Ecuación del movimiento

Un amortiguador viscoso ejerce una fuerza de resistencia pasiva proporcional a la velocidad, $F_A = -c\dot{x}$, de sentido contrario a ella. Este modelo corresponde aproximadamente a la

resistencia desarrollada por un embolo en un pistón lleno de líquido, al fluir por el hueco libre entre pistón y embolo. Se trata de una fuerza necesariamente no conservativa. Es fácil comprobarlo, ya que en cualquier trayectoria cerrada (origen y final en el mismo punto), el trabajo realizado por la fuerza de amortiguamiento es esencialmente negativo:

$$W_A = \oint \left(-k \frac{dx}{dt}\right) dx = \oint (-k\dot{x}^2) dt < 0.$$

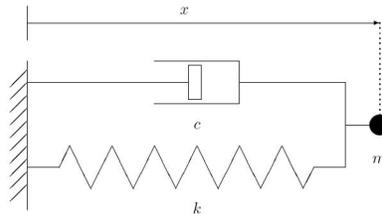


Figura 3.6: Oscilador con amortiguamiento viscoso

Aunque este modelo no representa de forma exacta la mayoría de las resistencias pasivas reales, resulta sencillo y suficientemente aproximado para una gran cantidad de casos prácticos, permitiendo considerar las inevitables resistencias del medio en que se produce la vibración. Considerando la fuerza del amortiguador, la fuerza total sobre m es ahora:

$$F = -c\dot{x} - kx,$$

resultando la ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (8)$$

Esta sigue siendo una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y homogéneos.

4.2 Integración de la Ecuación

La solución de la ecuación (8) es del mismo tipo que en el caso anterior sin amortiguamiento (1), es decir, basada en funciones armónicas. Tan solo es necesario aquí generalizar algo la expresión de las soluciones ensayadas, para lo cual emplearemos una exponencial del tipo $x(t) = ae^{rt}$. En principio, permitiremos que tanto $a \in \mathbb{C}$ como $r \in \mathbb{C}$ sean números complejos, aunque por motivos físicos debemos exigir al final que el resultado $x(t)$ sea real. Como se sabe, la exponencial da lugar a funciones armónicas para exponente imaginario.

Derivando y sustituyendo en la ecuación (8), resulta:

$$(mr^2 + cr + k)e^{rt} = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2 + cr + k = 0. \quad (9)$$

Esta expresión se denomina ecuación característica, proporcionando los valores que debe tomar r para que exista la solución buscada:

$$r = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}. \quad (10)$$

Según el valor del discriminante ($c^2 - 4km$) en la expresión general anterior, pueden distinguirse varios tipos de solución:

a) $c^2 - 4km > 0$.- En este caso existen dos raíces reales para (9):

$$r_1 = -p, \quad r_2 = -q.$$

Sabemos que necesariamente ambas han de ser negativas, ya que empleando la expresión (10) se comprueba que $r_1 + r_2 < 0$ y $r_1 \cdot r_2 > 0$. Mediante la linealidad de la ecuación diferencial se demuestra que, si existen varias soluciones, cualquier combinación lineal de ellas es también solución de la ecuación (propiedad de comprobación inmediata). Por tanto, la solución general es:

$$x(t) = a_1 e^{-pt} + a_2 e^{-qt}.$$

En definitiva, se trata de una solución exponencial decreciente, que no ocasiona movimiento oscilatorio, debido a que el amortiguamiento c es excesivamente grande (amortiguamiento *supercrítico*). En la figura 7 se muestra el movimiento que se obtiene para un sistema de este tipo, en varios casos con distintas condiciones iniciales.

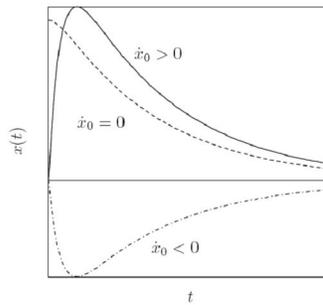


Figura 7: Movimiento de un sistema definido por la ecuación $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$, con amortiguamiento supercrítico ($c > 2\sqrt{km}$), bajo distintas condiciones iniciales.

b) $c^2 - 4km = 0$.- Se trata del caso límite, en el que el amortiguamiento posee el valor crítico $c_{crit} = 2\sqrt{km}$. Existe una raíz real doble, negativa al igual que antes, para (9):

$$r = -\frac{c}{2m} = -p,$$

Correspondiendo a la solución $x(t) = ae^{-pt}$ Se puede comprobar que $x = bte^{-pt}$ también es solución, por lo que la solución general será una combinación de estas dos:

$$x = (a + bt)e^{-pt}.$$

Comprobamos por tanto que en este caso tampoco se produce un movimiento de tipo oscilatorio.

c) $\underline{c^2 - 4km < 0}$.- Se obtienen en este caso dos raíces complejas conjugadas para (9),

$$r_1 = -p + \omega i, \quad r_2 = -p - \omega i,$$

Siendo

$$p = \frac{c}{2m}, \quad \omega = \sqrt{-\frac{c^2}{4m^2} + \frac{k}{m}}.$$

La parte real de la solución es negativa, dando lugar a una exponencial decreciente, que multiplica a una función armónica:

$$\begin{aligned} x &= a_1 e^{(-p+i\omega)t} + a_2 e^{(-p-i\omega)t} \\ &= e^{-pt} (a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}) \\ &= e^{-pt} [(a_1 + a_2) \cos \omega t + i(a_1 - a_2) \sin \omega t] \end{aligned}$$

Aunque en un caso general esta expresión pueda tener componente imaginaria, por motivos físicos sabemos que x debe ser real. Esto obliga a que las constantes complejas $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ den lugar a unas nuevas constantes reales $A, B \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (B - iA)/2 \\ a_2 &= (B + iA)/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} B &= a_1 + a_2 \\ A &= i(a_1 - a_2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

resultando

$$x = e^{-pt} (A \sin \omega t + B \cos \omega t).$$

Otra forma equivalente de expresar esta solución es mediante el cambio de las constantes (A, B) a otras (a, φ) definidas por:

$$A = a \cos \varphi; \quad B = a \sin \varphi,$$

resultando la expresión:

$$\boxed{x = ae^{-pt} \sin(\omega t + \varphi).} \quad (12)$$

Este último caso de amortiguamiento sub-crítico ($c < c_{crit}$) es el que más nos interesa, ya que es el único en que se producen vibraciones. La expresión (12) representa un movimiento oscilatorio

amortiguado de amplitud decreciente (ae^{-pt}), al estar modulado por una exponencial negativa. Aunque el movimiento es oscilatorio, no sería correcto en rigor llamarlo periódico, ya que cada vibración es distinta, al disminuir la amplitud. Se define como amplitud (de forma más rigurosa, <<pseudo-amplitud>>) del movimiento al valor ae^{-pt} , que tiende a 0 para $t \rightarrow \infty$. El movimiento desaparece en la práctica para un tiempo suficientemente grande. Es fácil comprobar que el intervalo entre máximos, al igual que entre pasos por cero, es constante e igual a $T = 2\pi/\omega$ (periodo de la vibración). Por tanto, a ω se le llama frecuencia angular natural del sistema amortiguado (con mayor rigor formal <<pseudo-frecuencia>>).

El parámetro a representa la amplitud inicial y φ el ángulo de fase.

Estas dos constantes (o alternativamente las A y B si se opta por la otra representación de la solución, definida mediante (11)) se calculan a partir de las condiciones iniciales (x_0, \dot{x}_0) .

En resumen, en función de los parámetros del problema, la solución quedará expresada como:

$$x = ae^{-\frac{c}{2m}t} \text{sen}(\omega t + \varphi), \quad \text{con } \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}. \quad (13)$$

A menudo es útil emplear una notación alternativa para estas expresiones, en función de la frecuencia natural sin amortiguamiento $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}$ (ecuación (5)) y la tasa de amortiguamiento crítico ζ , definida como

$$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2m\omega_0}.$$

El significado de ω_0 ya se discutió antes. En cuanto a ζ , se trata de un valor adimensional, que para los sistemas oscilatorios (amortiguamiento subcrítico) se halla entre 0 y 1. En el caso en que sea $\zeta \geq 1$ el amortiguamiento es crítico o supercrítico y no se producen vibraciones. Para vibraciones estructurales, los valores usuales de ζ son pequeños; en una estructura real puede ser del orden de $\zeta = 0,02 = 2\%$ o menor.

En función de estos parámetros, la ecuación diferencial (8) se puede escribir:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (14)$$

Mientras que la solución (13) se expresa como:

$$x = ae^{-\zeta\omega_0 t} \text{sen}(\omega t + \varphi), \quad \text{con } \omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (15)$$

Se observa inmediatamente que la pseudo-frecuencia ω de este movimiento es menor que en el caso sin amortiguamiento (ω_0), debido al factor $\sqrt{1 - \zeta^2} < 1$. Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos, al ser ζ pequeño, ambos valores resultan muy próximos ($\omega \sim \omega_0$).

Ejemplo 1:

Una masa m de 400Kg puede deslizar sin rozamiento sobre un eje horizontal, unida mediante un resorte elástico de constante $k = 10^5$ N/m a una base fija en el eje. Existe además un amortiguamiento viscoso, que reduce la amplitud de la Vibración a la centésima parte cada 10 s. Se pide: a) Valor de la constante c de amortiguamiento y de la tasa ζ respecto del crítico; b) Suponiendo que parte de $X_0 = 0,05m$ medido desde la posición de equilibrio en reposo, obtener la ecuación del movimiento así como el valor numérico de la posición al cabo de 2 s.

Solución:

a) El movimiento es un caso de vibraciones libres con amortiguamiento, dado por la ecuación (15):

$$x = ae^{-\xi\omega_0 t} \text{sen}(\omega t + \phi_0).$$

El valor de la frecuencia natural del sistema sin amortiguar es:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = 15,811388 \text{ rad/s} = 2,51646 \text{ Hz.} \tag{16}$$

El decremento de la pseudo-amplitud permite calcular la razón de amortiguamiento:

$$ae^{-\xi\omega_0 \cdot 10} = \frac{a}{100} \Rightarrow \xi = \frac{\ln 100}{10\omega_0} = 0,029126 \approx 2,9\%. \tag{17}$$

La constante de amortiguamiento vale:

$$c = 2\xi\omega_0 = 368,4136 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}.$$

b) Una vez calculados todos los parámetros, se pueden obtener las constantes a partir de las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = A \text{sen} \phi_0 \\ 0 = -A\xi\omega_0 \text{sen} \phi_0 + A\omega \cos \phi_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0,05002122 \\ \phi_0 = 1,541667 = 0,490728\pi \end{array} \right.$$

La expresión numérica de la solución es por tanto:

$$x(t) = 0,05002122 e^{(-,4605170 t)} \text{sen}(15,80468 t + 1,541667), \tag{18}$$

Y la posición a los dos segundos es:

$$x(2) = 0,01964561 \text{ m.}$$

5. Vibraciones Forzadas

5.1 Ecuación del Movimiento

En este caso consideramos que sobre la masa m actúa una fuerza externa $f(t)$, además de las fuerzas internas antes descritas correspondientes al muelle y al amortiguador.

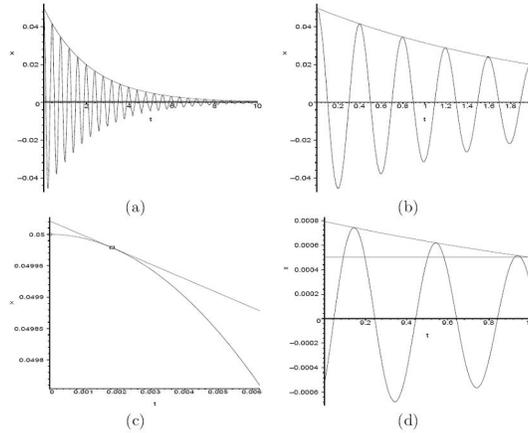


Figura 8: Resultados del ejemplo 1: (a) Grafica para $t \in [0, 10]$; (b) Detalle de la grafica para $t \in [0, 2]$, en la que se aprecian mejor las Vibraciones amortiguadas; (c) Detalle del comienzo del movimiento (duración = $1/64$ periodos) en el que se aprecia que en el instante inicial la curva no es tangente a la envolvente de pseudo-amplitud, junto con el punto de tangencia en que $(\omega t + \Phi_0) = \pi/2$; (d) Detalle de la fase final ($t \in [9, 10]$) comprobando que se alcanza la centésima parte de la elongación inicial (recta horizontal).

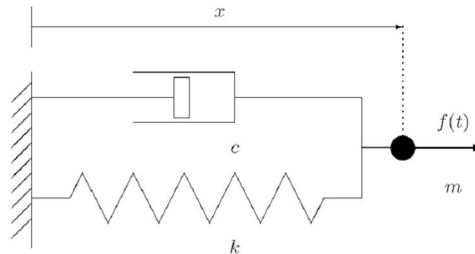


Figura 3.9: Oscilador simple con amortiguamiento sometido a fuerza externa.

La ecuación es ahora:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t). \quad (19)$$

Al incluir el termino independiente $f(t)$ la ecuación diferencial deja de ser homogénea. Esto da lugar a una estructura de la solución distinta, como se ve a continuación.

5.2 Integración de la Ecuación

Sean dos soluciones cualesquiera $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación completa (19):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 &= f(t), \\ m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 &= f(t); \end{aligned}$$

Restando término a término se obtiene:

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = 0.$$

Por tanto su diferencia, $xh(t) = x_2(t) - x_1(t)$, es solución de la ecuación homogénea (8). Esto nos sirve para poder expresar la solución general de la completa como una solución particular de la misma, que hallaremos por cualquier procedimiento, más la solución general de la homogénea que ya sabemos calcular:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

El problema se limita pues a calcular una solución particular de (19). Cualquier procedimiento que nos permita hallarla es bueno (todo vale). Como regla general, buscaremos una solución particular del mismo tipo que el termino de fuerza $f(t)$. Veremos a continuación las soluciones particulares para algunos casos significativos.

a) Fuerza Constante, $f(t) = D$.- Este caso puede corresponder a una fuerza constante estática, si su aplicación ha sido lenta, o a una función escalón dinámica, en el caso en que la aplicación sea súbita. En cualquier caso, la solución particular es otra constante, de valor:

$$x_p = \frac{D}{k}.$$

La comprobación es inmediata, al ser:

$$\dot{x}_p = \ddot{x}_p = 0.$$

Este caso corresponde, por ejemplo, al de un muelle en posición vertical sujeto a la gravedad; al de la fuerza de rozamiento durante el intervalo en que no cambia de signo (supuesta la reacción normal constante); o al de una fuerza constante o escalón cualquiera.

Por otra parte, llamando $x_0 = D/k$ (cte.), la adición de una solución $x_p = x_0$ puede interpretarse también como una simple traslación del origen de coordenadas, $x'(t) = x(t) - x_0 = xh(t)$. De esta forma el movimiento puede describirse como una vibración libre alrededor de un nuevo centro, trasladado x_0 .

Este sería el caso, por ejemplo, de una masa m colgando de un resorte de constante k en dirección vertical, sometida a su propio peso (mg). El movimiento puede interpretarse como una vibración libre, alrededor de un punto de equilibrio situado a la distancia mg/k , por debajo del punto de longitud natural del muelle.

b) Fuerza lineal, $f(t) = Et$.- Se trata de una fuerza que aumenta o disminuye linealmente con el tiempo. Tanteamos la solución $x_p = mt + n$, también lineal. Sustituyendo en (19) se obtienen los valores de m y n :

$$cm + k(mt + n) = Et \Rightarrow \begin{cases} m = E/k \\ n = -cE/k^2, \end{cases}$$

Por lo que resulta:

$$x_p = \frac{E}{k} \left(t - \frac{c}{k} \right).$$

Este caso sirve para definir un tramo en forma de rampa en una función de fuerza.

c) **Fuerza Armónica**, $f(t) = q \text{ sen}\Omega t$.- Este caso tiene especial importancia, ya que no solo sirve para una fuerza armónica en si misma, sino que servirá también como base para calcular la solución frente a una carga cualquiera, mediante el desarrollo en serie de Fourier (mostrado mas adelante).

Tanteamos una solución que sea igualmente armónica, con la misma frecuencia que la excitación, pero admitiendo un posible desfase δ respecto de la carga:

$$x_p(t) = A \text{ sen}(\Omega t + \delta).$$

Sustituyendo en (19):

$$(k - m\Omega^2) \text{ sen}(\Omega t + \delta) + c\Omega \cos(\Omega t + \delta) = \frac{q}{A} \text{ sen } \Omega t,$$

y particularizando para dos valores distintos de t se puede calcular A y δ .

- para $t=0$,

$$(k - m\Omega^2) \text{ sen } \delta + c\Omega \cos \delta = 0,$$

Y despejando δ :

$$\boxed{\tan \delta = -\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} = -\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}} \quad (20)$$

- Para $\Omega t + \delta = 0$,

$$c\Omega = \frac{q}{A} \text{ sen}(-\delta)$$

$$A = -\frac{q}{c\Omega} \text{ sen } \delta$$

Para expresar A en función de los parámetros del problema, debemos obtener en primer lugar la expresión de $\text{sen } \delta$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \delta &= \frac{\tan \delta}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \delta}} \\
&= \frac{-c\Omega}{\pm \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} \\
&= \frac{-2\xi\Omega\omega_0}{\pm \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}},
\end{aligned} \tag{21}$$

Resultando finalmente las expresiones siguientes para A:

$$A = \frac{q}{\pm \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} = \frac{q/m}{\pm \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}}. \tag{22}$$

Debido a la indeterminación del signo de la raíz en las expresiones anteriores ((21) para $\operatorname{sen} \delta$ y (22) para A), podría resultar un valor negativo para esta última constante. A veces es conveniente sin embargo tomar el signo de la raíz que hace A positivo, concordando con su interpretación física como amplitud. Esto obligaría a su vez a tomar el valor apropiado para δ , de forma que $\operatorname{sen} \delta$ tenga el signo que le corresponde. Conviene observar que para cambiar de signo ($\operatorname{sen} \delta$) basta con tomar $(\delta + \pi)$ en lugar de δ , es decir, se trata de un simple cambio del origen de tiempo, lo que siempre es lícito.

Una vez conocidos A y δ es posible escribir la solución general de la ecuación completa (19) que resulta:

$$x(t) = \underbrace{ae^{-\xi\omega_0 t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}_{\text{sol. gral. homogénea}} + \underbrace{A \operatorname{sen}(\Omega t + \delta)}_{\text{sol. part. completa}}. \tag{23}$$

En esta expresión quedan tan solo por determinar los parámetros a y φ , que se obtendrán particularizando para las condiciones iniciales. Conviene subrayar que, aunque estos parámetros afectan solo a la parte de la solución que proviene de la homogénea, es la solución completa (23) la que se debe particularizar. No debe cometerse el error de particularizar el sumando correspondiente a la solución homogénea, sino que debe ser la suma de ambas.

Por otra parte, es importante observar que la solución particular de la completa que hemos obtenido es *independiente de las condiciones iniciales*, al ser función únicamente de los parámetros A y δ , definidos por las expresiones (21) y (22) en las que no influyen dichas condiciones iniciales.

d) Régimen Transitorio y Permanente.- En el caso en que exista amortiguamiento, la solución de la homogénea al cabo de cierto tiempo “cuanto tiempo sea dependerá del amortiguamiento” desaparece. El intervalo durante el que no se puede despreciar el término correspondiente a la solución de la homogénea, siendo significativos ambos sumandos en (23), se llama *régimen*

transitorio. El movimiento durante este régimen posee dos componentes armónicas de distinta frecuencia, la de la excitación (Ω) y la natural del sistema en vibración libre (ω).

El *régimen permanente* es el que se alcanza cuando el término correspondiente a la solución de la homogénea en (23) se amortigua hasta hacerse despreciable, quedando tan solo la solución particular de la completa. Como se ha dicho antes, esta solución particular se puede escoger de forma que no dependa de las condiciones iniciales. Por lo tanto, estas solo tendrán influencia durante el régimen transitorio. Dicho de otra manera, en un movimiento forzado y amortiguado, al cabo de un tiempo el movimiento es siempre el mismo independientemente de las condiciones iniciales.

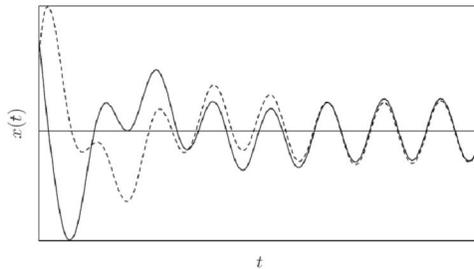


Figura 10: Movimiento oscilatorio forzado, para dos condiciones iniciales distintas; al cabo de cierto tiempo, el régimen permanente es el mismo.

Para una excitación periódica de tipo armónico, el régimen permanente tiene la misma frecuencia que la excitación, y un desfase δ respecto a ella, dado por la expresión (21). De esta se desprende que si no existe amortiguamiento, el desfase es también nulo. El desfase también depende de la relación entre Ω y ω_0 , de forma que, por ejemplo, para $\Omega = \omega_0$, resulta $\sin \delta = \pm 1$ y por tanto $\delta = \pm\pi/2$.

6. Amplificación Dinámica y Resonancia

Una carga aplicada de forma dinámica puede producir un efecto considerablemente mayor que aplicada de forma estática, es decir, suficientemente lenta para que no se llegue a producir vibración. Este efecto se denomina *amplificación dinámica*.

Un ejemplo sencillo es la aplicación de una carga constante P_0 , sobre un sistema formado por una masa m y un resorte k , sin amortiguamiento. Si se aplica de forma estática (mediante una rampa suficientemente lenta), el desplazamiento sería $x_{est} = P_0/k$.

Si se aplica de forma súbita, como un escalón de carga, suponiendo que inicialmente el resorte está en su posición natural y sin velocidad, la respuesta es:

$$x_{din}(t) = \frac{P_0}{k} - \frac{P_0}{k} \cos(\omega_0 t).$$

El desplazamiento máximo se produce para $\omega_0 t = \pi$ y vale $x_{din,max} = 2P_0/k$. Por tanto, la amplificación dinámica de la carga es:

$$\text{f.ampl.} = \frac{x_{din,max}}{x_{est}} = 2,$$

Es decir, el efecto dinámico es el doble del estático.

Supongamos ahora que se aplica la misma carga, pero modulada por una función armónica, $P_0 \text{sen}(\Omega t)$. Supondremos que existe un pequeño amortiguamiento inevitable, por lo que el movimiento llega a un régimen permanente, pero que sin embargo se puede despreciar su efecto en la ecuación de dicho régimen, al ser su valor muy pequeño. Decimos, abusando de la expresión, que es un caso “sin amortiguamiento”, aunque queda claro implícitamente que algún amortiguamiento, por pequeño que sea, ha debido existir para que desaparezcan los términos transitorios. En el régimen permanente la respuesta es un movimiento igualmente armónico, cuya amplitud se puede deducir de la ecuación (22):

$$x_{din,max} = A(\Omega) = \frac{P_0}{k - m\Omega^2}.$$

La amplificación dinámica es

$$\text{f.ampl.} = \frac{x_{din,max}}{x_{est}} = \frac{1}{1 - \Omega^2/\omega_0^2}. \quad (24)$$

Si $\Omega = 0$, el factor de amplificación es la unidad, como debería ser en buena lógica, al tratarse de una carga estática. Si $\Omega \rightarrow \infty$, el factor de amplificación tiende a cero, lo que quiere decir que la excitación es demasiado rápida y el resorte no tiene tiempo para deformarse, la masa no llegaría a moverse.

Por ultimo, si $\Omega \rightarrow \omega_0$, el factor de amplificación tiende a ∞ .

Se denomina **resonancia** al fenómeno por el cual la amplitud de la vibración se hace máxima para determinadas condiciones de la excitación.

Como se ha visto en el ejemplo anterior, la amplitud puede tender a ∞ bajo determinadas circunstancias (ecuación (24)). En este caso la resonancia conduciría a un fallo completo del sistema, por una amplitud de movimiento excesiva.

En un caso general con amortiguamiento, la expresión (22) proporciona la amplitud (A) del régimen permanente. Utilizando dicha ecuación, es posible dibujar la grafica de la amplitud obtenida para un valor dado del amortiguamiento (ζ), en función de la frecuencia de excitación (Ω)

(figura 11). Se observa que para amortiguamiento, $\zeta \neq 0$ la curva muestra en general un máximo de la amplitud, mientras que para $\zeta = 0$ no existe máximo, tendiendo la amplitud resonante a ∞ .

Desde un punto de vista de cálculo, la frecuencia de resonancia se obtiene hallando el máximo de (22):

$$A = \frac{q/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}}$$

Puesto que el numerador es constante, se busca el mínimo del radicando en el denominador,

$$\frac{d}{d\Omega} [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2] = 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\xi^2\omega_0^2\Omega = 0,$$

obteniéndose finalmente:

$$\boxed{\Omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad (25)$$

La amplitud resonante se obtiene sustituyendo el valor de Ω_r en la expresión (22) de A :

$$\boxed{A_r = \frac{q}{c\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{q}{c\omega} = \frac{q/c}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}} \quad (26)$$

Conviene observar que las expresiones (4), (13) y (25) definen tres frecuencias características del sistema, que ordenadas de mayor a menor quedan:

$$\omega_0 > \overbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}^{\omega} > \overbrace{\omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}}^{\Omega_r}.$$

Aunque sus valores sean distintos para un caso con amortiguamiento, en los casos prácticos reales, el amortiguamiento ζ suele ser pequeño y las tres frecuencias tienen valores muy próximos. Para los valores usuales del amortiguamiento en vibraciones estructurales (del orden de 1% – 2% o incluso menores), la resonancia se produce muy próxima a ω_0 , como se aprecia en la figura 11. Por ello, en la práctica ingenieril a menudo se confunden las dos frecuencias ω_0 y Ω_r . La diferencia de frecuencias es mayor para valores altos del amortiguamiento ζ , aunque entonces también ocurre que la resonancia tiene menor importancia. Si $\zeta^2 \geq 1/2$ ($\zeta \geq 0,71$) no se llega a producir máximo de A , por lo que no hay resonancia. En este caso la función $A(\Omega)$ es monótona decreciente y no tiene máximo local, como puede apreciarse en la figura 11.

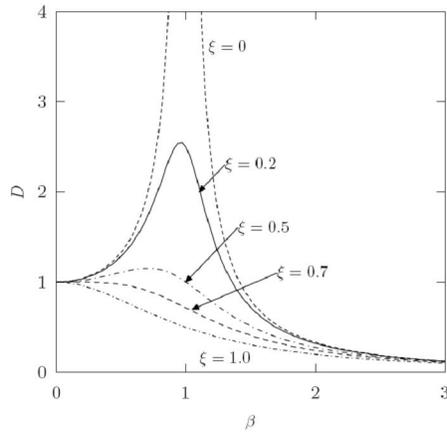


Figura 11: Amplitud de vibración para una excitación armónica, en función de la frecuencia de excitación Ω , para diversos valores del amortiguamiento ξ . Los ejes representan magnitudes adimensionales, en abscisa $\beta = \Omega/\omega_0$, y en ordenadas $D = A/(q/k)$ (factor de amplificación dinámica).

Ejemplo 2:

Como continuación del ejemplo 1, resolver las siguientes cuestiones adicionales:

- a) Suponiendo ahora que a la base se le comunica un movimiento impuesto armónico, de amplitud 0,05 m y frecuencia 2 Hz, obtener el movimiento tanto durante el régimen transitorio como en el régimen permanente. Como condiciones iniciales, se admitirá que parte del reposo en la posición de equilibrio.
- b) Obtener la frecuencia de la excitación anterior que produce la máxima amplitud del movimiento, el valor de dicha amplitud máxima y el factor de amplificación.

Solución:

a) Sea $x(t)$ el movimiento de elongación del resorte, relativo a la base, y $x_b(t)$ el movimiento impuesto de la base. El movimiento absoluto es por tanto $x(t) = x(t) + x_b(t)$. La ecuación del movimiento es:

$$m\ddot{X} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_b. \tag{27}$$

Teniendo en cuenta $x_b(t) = B \text{sen}(\Omega t)$, resulta:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mB\Omega^2 \text{sen}(\Omega t).$$

La solución general consta de la solución general de la homogénea mas una solución particular de la completa, $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. Suponiendo una solución particular del tipo

$$x_p(t) = C \text{sen}(\Omega t + \delta), \tag{28}$$

y obligando a que $x(t)$ cumpla la ecuación anterior, se obtiene

$$\delta = \arctan\left(\frac{c\Omega}{m\Omega^2 - k}\right) = -0,125031 \text{ rad};$$

$$C = -\frac{mB\Omega^2}{\sqrt{c^2\Omega^2 + (m\Omega^2 - k)^2}} = -0,0850728 \text{ m.}$$
(29)

(Estos parámetros podrían haberse deducido también directamente de aplicar las expresiones (20) y (22), con $q = mB\Omega^2$) La solución completa de la ecuación es:

$$x(t) = C \text{ sen}(\Omega t + \delta) + Ae^{-\xi\omega_0 t} \text{ sen}(\omega t + \phi_0).$$
(30)

Obligando a que cumpla las condiciones iniciales ($x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$), se obtienen las constantes A y ϕ_0 :

$$\phi_0 = \arctan\left(\frac{2\xi\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\xi^2\omega_0^2}\right) = -0,157492 \text{ rad};$$

$$A = -\frac{C\Omega}{\omega} = 0,0676418 \text{ m.}$$
(31)

Con estos datos y los parámetros ξ, ω calculados anteriormente (ecuaciones (16) y (17)) queda determinada la ecuación del movimiento (30):

$$x(t) = -0,0850728 \text{ sen}(4\pi t - 0,125031) + 0,0676418 e^{-0,4605170 t} \text{ sen}(15,80468 t - 0,157492).$$
(32)

Esta solución es la “*completa*”, que corresponde al llamado *régimen transitorio*. Pasado suficiente tiempo, el segundo sumando en esta expresión (la solución de la homogénea) desaparece, debido a la exponencial decreciente, y queda el denominado *régimen permanente*, que se identifica con la solución particular (28). En la figura 12 pueden observarse estas dos soluciones. Refiriéndose al régimen permanente, el factor de amplificación dinámica (respecto a la amplitud del movimiento impuesto en la base) es $FA = 0,0850728/0,05 = 1,701457$.

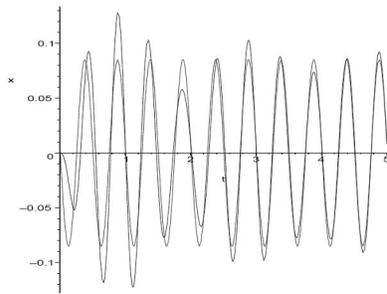


Figura 12: Régimen transitorio y permanente, pudiendo observarse como a medida que avanza el tiempo e movimiento se va aproximando al régimen permanente.

b) Para hallar el máximo de la amplitud en régimen permanente, basta con derivar la expresión de C en (29₂) se igualar a cero. Desarrollando las operaciones se obtiene la frecuencia de resonancia:

$$\Omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} = 15,82482 \text{ rad/s.}$$
(33)

Obsérvese que para este caso en que la excitación es por movimiento armónico en la base la frecuencia de resonancia no coincide con la obtenida anteriormente para una fuerza armónica (25). El motivo es que el numerador en la expresión (29₂) también depende ahora de Ω , y el máximo no coincide para ambos casos.

Sustituyendo esta frecuencia en (29₂) se calcula la amplitud máxima (resonante):

$$C = -0,858714 \text{ m.} \quad (34)$$

El factor de amplificación lo expresamos en este caso como cociente entre la amplitud dinámica obtenida y la amplitud de la excitación:

$$FA = \frac{0,858714}{0,05} = 17,17428.$$

En la figura 13 se aprecia la variación del factor de amplificación con la frecuencia Ω , marcándose claramente el pico de resonancia.

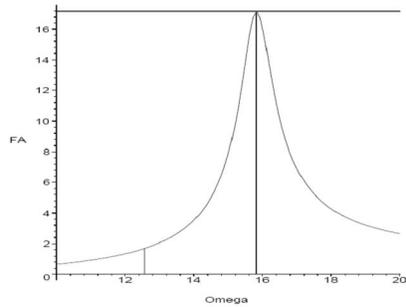


Figura 13: Factor de amplificación dinámica en función de la frecuencia de excitación de la base. Se marcan con líneas verticales la situación para la excitación definida en el primer apartado y la situación de resonancia.

7. El Espacio de las Fases

Es posible realizar una transformación de la ecuación diferencial de segundo orden del oscilador armónico simple (1), en función de la variable x , a un sistema equivalente de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, con dos variables: x y $p \stackrel{\text{def}}{=} m\dot{x}$ (cantidad de movimiento o momento conjugado a x). Este cambio origina las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{p} + kx = 0 \\ p = m\dot{x} \end{cases} \quad (35)$$

El espacio de las fases permite una descripción distinta del problema a la realizada en los apartados anteriores, en función de las variables (x, p) . Este tipo de variables son las que se emplean en la dinámica analítica. Tiene especial interés cuando se desea estudiar la dinámica del sistema de forma geométrica o cualitativa, por la dificultad o incluso imposibilidad de resolverlo de manera cuantitativa.

Para obtener la trayectoria del sistema en el espacio de las fases, observamos:

$$\dot{p} = \frac{dp}{dx} \dot{x} = \frac{dp}{dx} \frac{p}{m};$$

Sustituyendo en (35₁):

$$\frac{dp}{dx} \frac{p}{m} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{m} dp + kx dx = 0.$$

Integrando esta ecuación de variables separadas se obtiene:

$$\boxed{\frac{1}{2m} p^2 + \frac{k}{2} x^2 = E,} \quad (36)$$

Donde la constante de integración E es precisamente la energía total del sistema, $m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$, que se mantiene constante e igual a su valor inicial como ya sabemos.

La trayectoria definida por (36) es una elipse con semiejes $\sqrt{2E/k}$ y $\sqrt{2Em}$ (figura 14). El punto por donde se empiece a recorrer la elipse depende de las condiciones iniciales, siendo la trayectoria siempre la misma elipse. El tamaño depende de la energía, E : las orbitas más energéticas corresponden a elipses de mayor tamaño.

Si el sistema tiene amortiguamiento, la energía E disminuye a lo largo del movimiento. La trayectoria física del sistema será pues una elipse cuyo tamaño va disminuyendo a lo largo del tiempo; es decir, se recorre una espiral elíptica que termina en el origen, correspondiente al estado de reposo con elongación nula del resorte, cuando el movimiento se ha amortiguado completamente. Decimos en este caso que el origen es un *atractor* del sistema, puesto que la trayectoria física tiende irremediablemente a él.

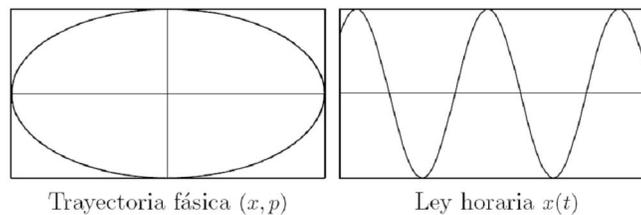


Figura 14: Oscilador sin amortiguamiento; trayectoria elíptica en el espacio físico, correspondiente a un movimiento con amplitud constante.

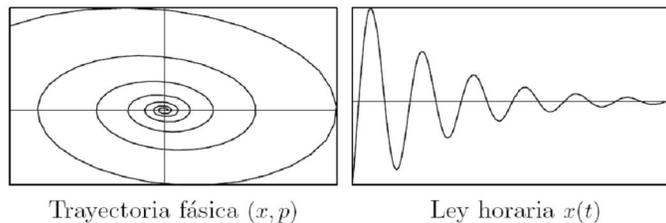


Figura 15: Oscilador con amortiguamiento; trayectoria en espiral elíptica correspondiente a amplitud decreciente, con atractor en el origen. Por último, una vibración forzada con excitación armónica acaba oscilando en un régimen permanente, también armónico, que corresponde a otra elipse en el espacio de las fases. Se dice

que el sistema tiene un ciclo límite, al que tiende siempre independientemente de las condiciones iniciales.

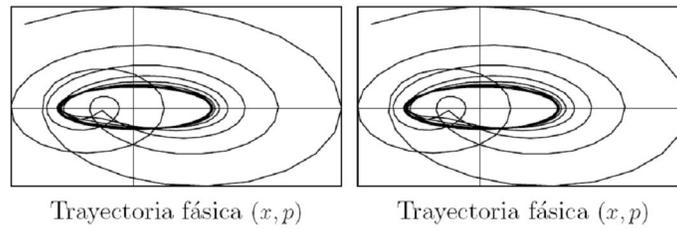


Figura 16: Oscilador forzado con amortiguamiento; la trayectoria fásica muestra claramente un ciclo límite.

En casos mas generales de sistemas dinámicos complejos, pueden existir varios atractores o ciclos límite, cada uno con su correspondiente “*cuenca de atracción*”. En los sistemas caóticos, a pesar del desorden e impredecibilidad que su nombre indica, a menudo se pueden establecer también atractores o ciclos límite. Sin embargo, ocurrirá que pequeñísimas perturbaciones pueden hacer que el sistema salte de uno a otro, de manera impredecible. En este último caso no es útil estudiar de forma determinista el sistema, por la extrema sensibilidad al cambio de cualquier parámetro o condición inicial. Sin embargo, el estudio de sus trayectorias en el espacio de las fases si puede proporcionar un medio útil para describir cualitativamente su respuesta. En sistemas complejos con comportamiento caótico, la representación grafica de las distintas trayectorias dinámicas y cuencas de atracción da lugar en ocasiones a figuras de tipo *fractal*, con una estructura compleja y que se repite a cualquier escala de observación.

8. Análisis Mediante Series de Fourier

El desarrollo en serie de Fourier es una herramienta importante que permite obtener la solución de un oscilador o vibrador forzado sometido a una excitación cualquiera, sin necesidad de que esta se ajuste a las funciones típicas estudiadas anteriormente. Su aplicabilidad radica en la linealidad de la ecuación.

8.1 Carácter Lineal de las Ecuaciones

Supongamos un oscilador o vibrador con amortiguamiento, sometido a una fuerza externa $F(t)$. La ecuación (19) se puede escribir como:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t), \quad (37)$$

Siendo $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(t)/m$, habiendo dividido ambos términos de la ecuación por m . Otra manera de expresar esta ecuación es mediante la definición de un operador $L(\cdot)$, que actúa sobre la función $x(t)$, definido de la siguiente manera:

$$L(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] (x) = \ddot{x} + 2\xi\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x.$$

El operador $L(\cdot)$ es una aplicación definida en el espacio de las funciones C^2 . La imagen de una función $x(t)$ mediante $L(\cdot)$ es otra función, definida a partir de (38). De esta manera, la ecuación dinámica (37) se puede expresar en forma compacta como:

$$L(x) = f.$$

Es inmediato comprobar el carácter lineal de $L(\cdot)$: para dos funciones cualesquiera $x_1(t)$, $x_2(t)$ y dos números arbitrarios $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2).$$

Por tanto, conocidas las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para dos funciones de fuerza dadas $f_1(t)$ y $f_2(t)$, la solución de la combinación lineal $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ es la combinación lineal de las soluciones respectivas:

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2) = \alpha f_1 + \beta f_2.$$

Esta propiedad se puede extender a una serie con N sumandos, $f_n(t)$, de los que suponemos conocidas las soluciones individuales, $x_n(t)$:

$$L\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t)\right) = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(t) = f(t)$$

Por lo que la solución de:

$$f = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n$$

Es la suma de las soluciones de cada término,

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n.$$

8.2 Análisis de Series de Armónicos

Supongamos ahora que el término de fuerza externa, $f(t)$, se puede expresar mediante una serie de armónicos, es decir, como suma de senos y cósenos con distintas frecuencias y afectados de distintas amplitudes. Conocemos ya por lo estudiado en este capítulo la solución a cada uno de los términos armónicos individuales. Como vimos, esta solución consta de un término que solo interviene durante el régimen transitorio (solución general de la homogénea) y de otro que caracteriza el régimen estacionario o permanente (solución particular de la completa). En el desarrollo que sigue estudiaremos tan solo el régimen permanente, admitiendo la hipótesis por otra

parte bastante usual, de que el transitorio solo dura un tiempo breve y por tanto carece de importancia a nuestros efectos. Así, si la serie que define la fuerza aplicada es:

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \cos \omega_n t,$$

La solución (régimen estacionario) para cada término de la serie es una función armónica cuya amplitud viene dada por la ecuación (22):

$$x_n(t) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2 \omega_0^2 \xi^2}} \cos(\omega_n t - \delta_n),$$

Siendo el desfase el definido por (20):

$$\delta_n = \arctan \frac{2\omega_n \omega_0 \xi}{\omega_0^2 - \omega_n^2}.$$

Sumando todas estas soluciones obtendremos la solución global,

$$x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t).$$

8.3 Desarrollo en Serie de Fourier

El Teorema de Fourier afirma que cualquier función periódica $f(t)$, de periodo τ , se puede desarrollar en serie de armónicos, de la forma:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t), \quad (39)$$

Siendo:

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi/\tau.$$

Este teorema quedara demostrado si somos capaces de proporcionar un método para calcular los coeficientes a_n , b_n que hacen posible el desarrollo (39). En primer lugar, calculemos la integral:

$$\int_0^{\tau} f(t) \cos m\omega t dt.$$

Al estar $f(t)$ definida mediante la serie (39) y suponiendo los requisitos necesarios de convergencia de ésta, la integral anterior se puede descomponer en la suma de las integrales de cada uno de los términos. Multiplicando cada uno de estos términos por $\cos m\omega t$ e integrando, resultan entonces las siguientes integrales, según los valores de m y n :

- si $n \neq m$,

$$a_n \int_0^\tau \cos n\omega t \cos m\omega t dt = a_n \int_0^\tau \frac{1}{2} [\cos(n+m)\omega t + \cos(n-m)\omega t] dt = 0;$$

$$b_n \int_0^\tau \text{sen } n\omega t \cos m\omega t dt = b_n \int_0^\tau \frac{1}{2} [\text{sen}(n+m)\omega t + \text{sen}(n-m)\omega t] dt = 0$$

- si $n = m$,

$$\begin{aligned} a_m \int_0^\tau \cos^2 m\omega t dt &= a_m \int_0^\tau \frac{1 + \cos 2m\omega t}{2} dt = a_m \frac{\tau}{2} \\ b_m \int_0^\tau \text{sen } m\omega t \cos m\omega t dt &= b_m \int_0^\tau \frac{1}{2} \text{sen } 2m\omega t dt = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Vemos pues que el único término que da una contribución no nula es el correspondiente a $am\cos m\omega t$. Análogamente, multiplicando (39) por $\text{sen } m\omega t$ e integrando, la única integral no nula de la serie resulta ser:

$$\int_0^\tau f(t) \text{sen } m\omega t dt = b_m \int_0^\tau \text{sen}^2 m\omega t dt = b_m \frac{\tau}{2}. \quad (41)$$

Por ultimo, la integral directa de $f(t)$ es:

$$\int_0^\tau f(t) dt = \int_0^\tau \frac{1}{2} a_0 dt = a_0 \frac{\tau}{2}. \quad (42)$$

De (40), (41) y (42) deducimos los coeficientes de (39), que son:

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \cos n\omega t dt \quad (43)$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \text{sen } n\omega t dt \quad (44)$$

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt \quad (45)$$

Al tener un método para calcular estos coeficientes para cualquier valor de n , queda demostrado el teorema de Fourier y definido el desarrollo en serie. El desarrollo en serie de Fourier tiene aplicaciones importantísimas en la ingeniería, ya que convierte el análisis de una función periódica cualquiera en los análisis de casos elementales de términos armónicos, cuya solución nos es conocida. La función $f(t)$ no tiene limitación, salvo que sea periódica. Puede estar definida mediante una función analítica cualquiera, por puntos, etc. En la práctica, bastara tomar tan solo un cierto número de términos del desarrollo, para obtener la precisión suficiente, truncando el resto de la serie.

Es posible extender el método del desarrollo en serie de Fourier a una función cualquiera, aunque no sea periódica. Para ello se emplea el truco de construir una nueva función periódica, con un periodo suficientemente largo que abarca el intervalo de tiempo de interés de la función no periódica. En esta nueva función se añade a la función original, al cabo del intervalo de tiempo de interés, un intervalo de silencio, hasta un tiempo suficientemente grande, $\tau \rightarrow \infty$. Al cabo de un tiempo τ , nuestra función se volvería a repetir. Sin embargo, como solo estamos interesados en la solución para $t < \tau$, esto no supone ningún inconveniente.

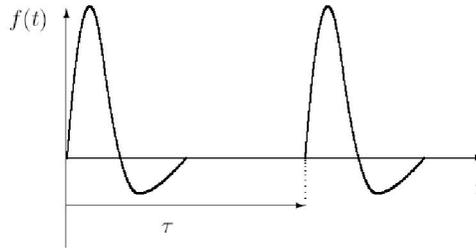


Figura 17: Desarrollo en serie de Fourier de funciones no periódicas

En este último caso, si $\tau \rightarrow \infty$, los coeficientes a_n y b_n deducidos de (43, 44) se convierten en infinitésimos, puesto que τ está en el denominador. La suma del desarrollo en serie de Fourier se transforma (en el límite) en una integral, denominada *transformada de Fourier*. Esta integral tiene exactamente la forma inversa de las integrales para los coeficientes a_n y b_n expresadas en las ecuaciones (43, 44), términos que están relacionados con cada valor de la frecuencia, $\omega_n = n\omega$. Este conjunto de frecuencias discreto, al aumentar τ tiende a una distribución continua. La *transformada de Fourier* se puede interpretar entonces como un cambio de formulación, pasando a expresar el problema inicialmente formulado en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

9. Análisis de Transitorios Mediante la Función de Green

El desarrollo en serie de *Fourier* proporciona la solución del régimen estacionario, ya que en su deducción despreciamos deliberadamente el efecto de los transitorios. Para los casos en los que sea necesario obtener el régimen transitorio se puede aplicar el método de la función de Green, que desarrollamos a continuación.

9.1 Respuesta a Una Función Impulso

Partimos, como antes, de la ecuación general del movimiento oscilatorio forzado (37),

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t),$$

Cuya solución general es:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

Suponemos que este sistema esta sometido a un impulso instantáneo en el instante $t = \theta$, un pico de fuerza que se puede suponer de duración prácticamente nula, pero que por su intensidad tiene un efecto apreciable sobre el sistema. Matemáticamente, una función impulso se representa mediante la función δ de *Dirac*, definida como:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \forall t \neq 0 \\ \delta(0) \rightarrow \infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

Una manera de entender el significado de la función singular $\delta(t)$ es considerarla como el limite de una función continua como la representada en la figura 18, con forma de triangulo isósceles de base 2ϵ y altura $1/\epsilon$, cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Así un impulso de valor I en $t = \theta$ se representa por $f(t) = I \delta(t - \theta)$.

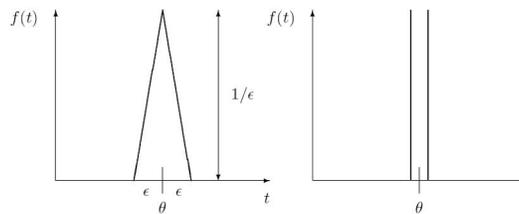


Figura 18: Impulso, representado por la función delta de Dirac.

Integrando esta fuerza,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} I \delta(t - \theta) dt = I$$

Puesto que $f(t) = F(t)/m$, I será el impulso por unidad de masa, o sea, el incremento de velocidad que adquiere m por virtud de la impulsión. Podemos entender esta por lo tanto como una causa instantánea que modifica el estado de velocidad en $t = \theta$, quedando después el sistema en vibración libre, ya que $f(t)$ desaparece.

La solución a un impulso elemental es pues la respuesta en vibraciones libres con las condiciones iniciales $x(\theta) = 0$; $\dot{x}(\theta) = I$. La solución par $t > \theta$ es la de la homogénea:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (A \cos \omega t + B \text{sen } \omega t), \quad \text{para } t > \theta,$$

Siendo

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación del movimiento las dos condiciones iniciales, obtenemos las constantes A y B :

$$A = -\frac{I e^{-\xi\omega_0\theta}}{\omega} \operatorname{sen} \omega\theta,$$

$$B = -\frac{I e^{-\xi\omega_0\theta}}{\omega} \operatorname{cos} \omega\theta.$$

Quedando, finalmente, la solución para la respuesta a un impulso elemental como:

$$x(t) = \frac{I}{\omega} e^{-\xi\omega_0(t-\theta)} \operatorname{sen} \omega(t-\theta), \quad \text{para } t > \theta. \quad (46)$$

10. Análisis de Transitorios Para Una Excitación Arbitraria

Suponemos ahora que sobre el oscilador actúa una fuerza $F(t)$ cualquiera, no impulsiva. Podremos descomponer, dividiendo el tiempo en intervalos infinitesimales, esta fuerza como una serie de impulsos elementales, correspondientes a los rectángulos elementales en el diagrama de $F(t)$ (figura 19):

$$dI = \frac{F(\theta)}{m} d\theta.$$

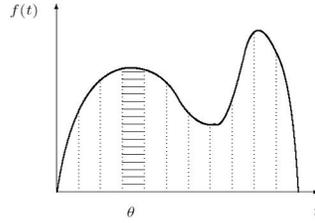


Figura 3.19: Descomposición de $f(t)$ en impulsos elementales

Por la linealidad del operador, podremos obtener la respuesta global en un instante t dado, como la suma o integral de las respuestas a todos estos impulsos elementales dI para $\theta < t$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{F(\theta)}{m\omega} e^{-\xi\omega_0(t-\theta)} \operatorname{sen} \omega(t-\theta) d\theta.$$

Se define la función de Green $G(t, \theta)$ como:

$$G(t, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m\omega} e^{-\xi\omega_0(t-\theta)} \operatorname{sen} \omega(t-\theta), \quad \text{para } t > \theta.$$

En función de $G(t, \theta)$ la integral anterior queda por tanto:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t F(\theta) G(t, \theta) d\theta.$$

Esta integral se llama también *integral de Duhamel*. En la práctica, las integrales se evaluarán numéricamente, salvo casos particulares simples que admitan resolución analítica.

Resumiendo, el método de análisis mediante la función de *Green*:

- Proporciona la respuesta transitoria completa, no limitándose al régimen permanente.
- Incluye automáticamente la información sobre las condiciones iniciales.
- Sirve para funciones de carga arbitrarias.

11. Métodos Numéricos Para Integración Directa

En la práctica la resolución de problemas dinámicos reales se realiza, salvo casos particulares simplificados, mediante cálculo numérico en ordenadores digitales. Los métodos anteriormente expuestos son susceptibles de tratamiento numérico a través de las transformadas discretas de Fourier, o de la evaluación numérica de las integrales de convolución de *Duhamel* (*función de Green*).

Otra técnica interesante que permite resolver numerosos problemas de índole muy general es la utilización de métodos numéricos para la *integración directa* de las ecuaciones de la dinámica. Este método tiene la ventaja sobre los anteriormente expuestos que no necesita presuponer la linealidad del oscilador, por lo cual es posible aplicarlo también a otros casos más generales en que los osciladores no sean lineales. Además, de forma automática se incluyen todos los términos, tanto transitorios como permanentes. Aunque existen numerosos métodos de integración paso a paso en el tiempo, expondremos de forma resumida solo dos:

- el método de *Euler* y
- el método de *Runge-Kutta* de 4° orden.

Ambos son métodos de un paso, sencillos de formular, y se encuentran entre los más usados en la práctica y en ellos se realiza una *integración paso a paso*, para lo cual supondremos que el tiempo se ha discretizado en intervalos pequeños Δt , definiendo instantes discretos t_n :

$$t_0, \quad t_1 = \Delta t, \quad t_2 = 2\Delta t, \quad \dots, \quad t_n = n\Delta t, \quad \dots, \quad t_{fin}$$

La ecuación a resolver será, como siempre:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t). \tag{47}$$

Suponemos conocida la solución en el instante

$$t_n: x_n = x(t_n), \quad \dot{x}_n = \dot{x}(t_n).$$

Se trata de obtener un procedimiento para avanzar la solución al instante

$$t_{n+1}: x_{n+1}, \quad \dot{x}_{n+1}.$$

11.1 Método de Euler

Suponemos conocidos en un instante dado

$$x_n \text{ y } \dot{x}_n.$$

A partir de la ecuación (47) se despeja:

$$\ddot{x}_n:$$

Quedando:

$$\ddot{x}_n = f(t_n) - 2\xi\omega_0\dot{x}_n - \omega_0^2x_n.$$

Los valores en $n + 1$ se obtienen mediante un desarrollo en serie de *Taylor* truncado a partir del segundo término:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + \ddot{x}_n\Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + \dot{x}_n\Delta t\end{aligned}$$

Así, procederíamos a partir del estado inicial conocido (x_0, \dot{x}_0) para obtener primeramente (x_1, \dot{x}_1) luego (x_2, \dot{x}_2) y así sucesivamente hasta el instante t_{fin} .

El método de *Euler* es muy sencillo de formular y de operar, siendo los algoritmos evaluables de manera explícita. Admite fácilmente la extensión al caso en que los coeficientes de la ecuación dependen del tiempo, o cuando la ecuación es no lineal.

El error de truncamiento local (el cometido para la solución de x en cada paso) es del orden $O(\Delta t^2)$. Por lo tanto, disminuyendo el tamaño del paso Δt suficientemente, se podrá llegar a reducir el error de truncamiento local tanto como se desee. Por ejemplo, al dividir Δt por 2, el error de truncamiento local quedara dividido por cuatro. Sin embargo, para el cómputo de la solución global, necesitaremos el doble de intervalos para alcanzar el mismo valor del tiempo final, por lo que si se adopta como cota del error la suma absoluta de los errores de truncamiento en cada intervalo, el error global final será la mitad del obtenido anteriormente.

Por tanto, se dice que el método de *Euler* tiene convergencia de primer orden o lineal: el error global es de orden $O(\Delta t)$, por lo que disminuye tanto como se desee al reducir Δt , de manera lineal.

Sin embargo, en la práctica hay que considerar otra fuente de error además de la puramente algorítmica: los errores de redondeo debido a la aritmética con precisión limitada. Esto es inevitable, especialmente en los ordenadores digitales, en que la computación se hace con un número fijo de dígitos. Cuanto mas subdivisiones del tiempo se realicen, mayor es este error

acumulado. Por este motivo, la convergencia lineal a menudo resulta demasiado débil: al realizar gran cantidad de operaciones, puede llegar un momento en el que los errores de redondeo predominen y la solución no converja con la precisión requerida (20).

Debido a su débil convergencia, es aconsejable bastante prudencia antes de emplear el método de Euler, comprobando en cada caso que se obtiene un nivel de error aceptable.

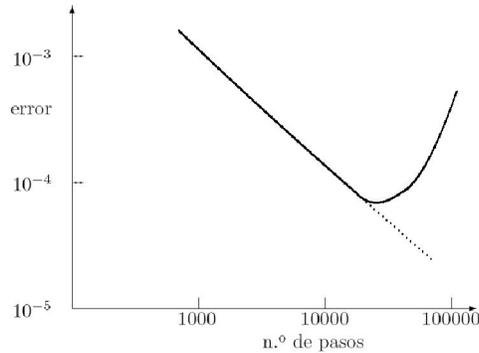


Figura 20: Error obtenido en la solución numérica de la ecuación $\dot{x} = x$ mediante el método de Euler, para $t \in [0,1]$, con $x_0 = 1$.

11.2 Método de Runge-Kutta

Se trata de un método más preciso que el de Euler, aunque también más costoso de formular y sobre todo de operar. Para exponerlo transformaremos en primer lugar ecuación dinámica de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x},$$

$$\dot{u} = f(t) - 2\xi\omega_0 u - \omega_0^2 x.$$

Para emplear una notación más compacta, definimos la variable “vectorial” y :

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix}.$$

Con esta notación, el problema se formula como:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ f(t) - 2\xi\omega_0 y_2 - \omega_0^2 y_1 \end{Bmatrix}$$

Para fijar ideas, con esta notación el método de Euler explicado arriba se escribiría simplemente:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \dot{\mathbf{y}}_n \Delta t.$$

El método de Runge-Kutta de cuarto orden se basa en la utilización de cuatro coeficientes (k_1, k_2, k_3, k_4), que se definen como:

$$\begin{aligned}
k_1 &\stackrel{\text{def}}{=} g(t_n, y_n) \\
k_2 &\stackrel{\text{def}}{=} g(t_n + \Delta t/2, y_n + k_1 \Delta t/2) \\
k_3 &\stackrel{\text{def}}{=} g(t_n + \Delta t/2, y_n + k_2 \Delta t/2) \\
k_4 &\stackrel{\text{def}}{=} g(t_n + \Delta t, y_n + k_3 \Delta t)
\end{aligned}$$

A partir de estos coeficientes, la expresión de y_{n+1} es:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

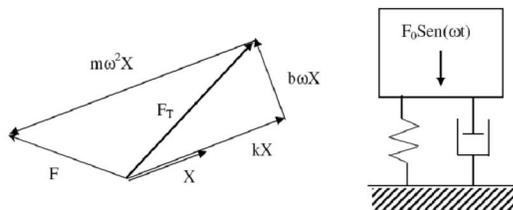
Una vez obtenido y_{n+1} repetiríamos el proceso para el siguiente paso.

Con este método se obtiene una convergencia del orden $O(\Delta t^4)$ razón por la cual se denomina de 4° orden. Por tanto, es mucho más exacto que el método de Euler, alcanzando una precisión suficiente en la gran mayoría de los casos. También es aplicable a problemas no lineales. Sin embargo, requiere un esfuerzo mucho mayor para su cómputo, siendo necesario evaluar en cada paso los coeficientes k_i . En los casos en los que se tengan muchas variables y funciones complejas de evaluar, su coste computacional puede resultar excesivo. En cambio, para problemas con un solo grado de libertad es muy recomendable al ser su solución en los ordenadores actuales muy rápida.

12. Aislamiento Vibratorio

Entendemos por aislamiento vibratorio, la atenuación de los efectos de las vibraciones originadas en máquinas y motores. Puede tratarse de aislar fuerzas perturbadoras producidas por desbalances rotatorios o movimientos del soporte. Se verá que ambos problemas pueden tratarse de manera similar. La solución de este problema consistirá en el montaje de la máquina sobre resortes, o combinación de resortes y amortiguadores.

A continuación, se analizará el aislamiento de la fuerza perturbadora originada por el desbalance rotatorio. En la figura, se muestra el diagrama de fasores, indicándose la fuerza transmitida a través del resorte y el amortiguador como F_T .



$$F_T = \sqrt{(kX)^2 + (b\omega X)^2} = kX \sqrt{1 + \left(\frac{b\omega}{k}\right)^2}$$

x = Amplitud del movimiento originado por una fuerza forzadora $F_0 \text{ Sen}(\omega t)$ Reemplazando x , se puede escribir la relación (F_T/F_0) como:

$$\frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{b\omega}{k}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \frac{m\omega^2}{k}\right]^2 + \left[\frac{b\omega}{k}\right]^2}} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \quad (48)$$

Esta relación es idéntica a la relación X/Y hallada en para el caso del movimiento del soporte, por lo que se concluye que el aislamiento de una máquina de las perturbaciones del soporte es idéntico al problema de aislar fuerzas perturbadoras.

Las razones (F_T/F_0) y (X/Y) se conocen como Transmisibilidad de fuerza o desplazamiento. Del análisis del gráfico que corresponde a la relación X/Y se deduce que:

- Para lograr una transmisibilidad menor que 1 (de esta manera se atenuaría la fuerza transmitida) los resortes sustentadores deben ser tales que la frecuencia natural debe ser baja comparada con la frecuencia de la perturbación.
- En la región $(\omega/\omega_n) > 2$, a menor factor de amortiguación menor es la transmisibilidad. Como contrapartida, en la región $\omega/\omega_n < 2$ esta relación se invierte.

CONCLUSIONES

Al haber realizado este informe de investigación se puede entender la teoría que engloba el estudio de las vibraciones. En este se han tratado temas de vital importancia para su entendimiento y comprensión.

Las vibraciones están presentes en cada parte de nuestro mundo y son de vital importancia para un ingeniero mecánico el manejo de su teoría. Mas aun para un ingeniero de mantenimiento el cual requiere entender el comportamiento de las maquinarias, en especial aquellas que están en constante movimiento (equipos rotativos). Un apropiado y experto análisis de las vibraciones a las cuales esta sometida o que son generadas por estas maquinarias, podría dar al mantenedor una vía segura de determinar los posibles problemas que pueden existir en un determinado momento, permitiendo de igual forma poder predecir una posible falla, esto abre una ventana de flexibilidades al momento de programar paradas de planta y realizar reparaciones o cambio de partes antes de tener fallas inesperadas.

Finalmente es importante citar que el haber realizado este informe ha dejado un conjunto de conocimientos que serán de una u otra forma aplicados en el trabajo diario, al momento de evaluar los sistemas que permiten analizar tales vibraciones en maquinarias.

En general se puede decir que los objetivos generales y específicos descritos al principio de este informe se han logrado.

BIBLIOGRAFIA

IRVING H. Shames., Engineering Mechanics, Static & Dinamic. International Edition "Fourth Edition"
Prentice Hall Inc. USA, 1997.

DAN B. Marghitu., Mechanical Engineer Handbook. USA First Edition, Academic Press, 2001.

IZQUIERDO V. Santiago., Mecánica Racional. Venezuela Segunda Edición, Ediciones Vega SRL,
1980.

F.P. Beer and E.R Johnston, Jr., Vector Mechanics for Engineers: Dinamic, McGraw Hill, New York
1996.

R.W Clough and J. Penzien , Dinamics of Structures, McGraw Hill, New York, 1975.

L. Meirovitch, Elements of Vibration Analysis, Mcgraw Hill, New York , 1986