

Teoría de modelos: Examen de consistencia y completitud de las teorías científicas

Model Theory: An Examination of the Consistency and Completeness of Scientific Theories

Autor: Juan Alberto Molina García¹
Correo electrónico: amdir2013@gmail.com



Resumen. El informe analiza la relación entre la teoría de modelos y la consistencia y completitud de las teorías científicas, destacando su relevancia para evaluar la coherencia interna y la adecuación empírica de los marcos teóricos. Situado en el ámbito de la lógica matemática, examina cómo los modelos semánticos refuerzan la solidez estructural de las teorías. El estudio subraya la importancia de la formalización, caracteriza los conceptos básicos de la teoría de modelos, analiza aplicaciones en distintas disciplinas, estudia casos concretos, examina limitaciones representacionales y propone líneas futuras de investigación. Con una metodología cualitativa basada en análisis teórico y casos representativos, concluye que la teoría de modelos ofrece un marco riguroso para evaluar consistencia y completitud, aunque su eficacia depende del equilibrio entre estructura lógica y adecuación empírica, especialmente en sistemas complejos.

Palabras clave. Teoría de modelos. Consistencia. Completitud. Coherencia interna. Modelos semánticos. Teorías científicas.

Abstract. This report analyses the relationship between model theory and the consistency and completeness of scientific theories, highlighting its relevance for assessing the internal coherence and empirical adequacy of theoretical frameworks. Situated within the field of mathematical logic, it examines how semantic models reinforce the structural robustness of theories. The study emphasises the importance of formalisation, characterises the fundamental concepts of model theory, analyses applications across different disciplines, examines specific case studies, explores representational limitations, and proposes directions for future research. Using a qualitative methodology based on theoretical analysis and representative cases, it concludes that model theory provides a rigorous framework for evaluating consistency and completeness, although its effectiveness depends on a balance between logical structure and empirical adequacy, particularly in complex systems.

Keywords. Model theory. Consistency. Completeness. Internal coherence. Semantic models. Scientific theories.

¹ Licenciado en Filosofía y Máster en Matemáticas Avanzadas (UNED). Doctorando del programa *Doctorate of Philosophy (Ph.D.) in Philosophy*, Tecana American University (TAU), USA, 2026. Profesor del RCSM de Madrid (España).

Introducción

En el vasto campo de la ciencia, las teorías sirven como instrumentos substanciales para describir, explicar y predecir los fenómenos naturales y sociales. Pero la validez de una teoría no depende únicamente de su capacidad para alinearse con los datos empíricos, sino también de su coherencia interna y de su completitud lógica. Por consiguiente, la ciencia pretende explicar lo observado, apuntalar sus argumentos en una estructura teórica sólida y conjurar todo tipo de contradicciones. Esta introducción presenta el sustento conceptual del informe que a continuación se expone, y se centra en cómo la teoría de modelos puede dotar de medios para evaluar y reforzar la consistencia y completitud de las teorías científicas.

Planteamiento del problema

Las teorías científicas, además de erigirse en guía de las investigaciones futuras, desempeñan un rol primordial en la explicación de los fenómenos y la predicción de nuevos sucesos. Sin embargo, para que una teoría científica sea considerada válida, no sólo debe ser capaz de efectuar predicciones precisas y de subsumir los datos empíricos en ellas, sino que su estructura interna ha de ser lógicamente consistente y completa. Es entonces cuando entra en acción la teoría de modelos, un área de la lógica matemática que aporta un marco formal para evaluar la coherencia interna de las teorías y la relación de éstas con la realidad.

El problema central que el presente estudio aborda es cómo los conceptos semánticos, representados en la teoría de modelos, se pueden emplear para evaluar la consistencia y la completitud de las teorías científicas. Aunque los científicos suelen destinar sus esfuerzos a la adecuación empírica de las teorías, también han de orientar su atención hacia la estructura formal y la coherencia interna de aquéllas; pues es así como pueden asegurarse de su validez y de que puedan aplicarlas a la realidad empírica.

Este informe, por lo tanto, se interesa por cómo la teoría de modelos semánticos puede ayudar a los científicos a garantizar que sus teorías sean empíricamente adecuadas, coherentes y completas. Esto es singularmente importante en campos científicos en los que las teorías tienden a ser extremadamente complejas y multifacéticas, como la física teórica, la biología evolutiva y la química cuántica, entre otras.

Objetivos del estudio

El objetivo general de este estudio es analizar la manera en que la teoría de modelos puede contribuir a la evaluación de la consistencia y la completitud de las teorías científicas. El desglose en objetivos específicos es el siguiente:

- (1) Determinar cuáles son los conceptos fundamentales de la teoría de modelos y examinar su relevancia en la formulación de las teorías científicas.
- (2) Investigar cómo se pueden utilizar los modelos semánticos para garantizar que una teoría científica sea internamente coherente.
- (3) Analizar ejemplos concretos en los que la teoría de modelos ha sido aplicada para evaluar la consistencia y completitud de las teorías científicas.
- (4) Identificar los retos y barreras que entorpecen la aplicación de la teoría de modelos a la práctica científica, sobre todo en teorías que estudian fenómenos complejos o que se analizan desde una perspectiva multidisciplinaria.
- (5) Proponer perspectivas de investigación futura que puedan mejorar la aplicación de la teoría de modelos en la evaluación de las teorías científicas, asegurando su consistencia y adecuación empírica.

Importancia de la teoría de modelos en la ciencia

La teoría de modelos es muy útil en la ciencia, porque proporciona un marco formal para comprender cómo los sistemas lógicos y matemáticos pueden representar la realidad. Mediante los modelos semánticos, la teoría de modelos facilita la asignación de significados precisos a los símbolos y ecuaciones que intervienen en un sistema formal; además, da fe de que las relaciones lógicas definidas sean coherentes y que las predicciones derivadas de las teorías se correspondan con las observaciones empíricas.

En las disciplinas abstractas y con elevado contenido matemático, la teoría de modelos se cuida de que las correspondientes teorías no contengan contradicciones que pudieran socavar su validez. Por ejemplo, en la mecánica cuántica y en la teoría de la relatividad, la consistencia lógica es tan primordial como la adecuación empírica.

Además, la teoría de modelos es indispensable para lidiar con los problemas de completitud. En áreas como la biología evolutiva o la economía matemática, cuyas teorías intentan modelar sistemas complejos y a menudo impredecibles, la completitud es un criterio muy importante para evaluar la robustez de las teorías.

Finalmente, la teoría de modelos se reviste de una importancia de primer orden en la validación y falsabilidad de las teorías científicas: puesto que proporciona un marco para evaluar la consistencia y la completitud de éstas, también hace posible la identificación de hipotéticos fallos o inconsistencias que fuercen a una revisión o refinamiento de las mismas.

Metodología

Para abordar de manera rigurosa el análisis de cómo la teoría de modelos contribuye a la evaluación de la consistencia y completitud de las teorías científicas, es de suyo establecer una metodología clara y bien

estructurada. Esta sección describe el enfoque adoptado al respecto, los métodos de análisis seleccionados y las fases específicas que guiarán el desarrollo del estudio.

La investigación se llevará a cabo según el método cualitativo, basado en el análisis teórico y conceptual. Este método es adecuado, dado que el objeto principal del trabajo es examinar la forma en que la teoría de modelos puede evaluar la consistencia de las teorías científicas, y no medir ni cuantificar datos empíricos.

Asimismo, la investigación será de tipo exploratorio y descriptivo. Esto implica que hay que efectuar un análisis profundo de la teoría de modelos y su aplicación a la ciencia; por ello, será preciso explicar cómo se emplean los modelos semánticos para confirmar la coherencia interna de las teorías y su correspondencia con la realidad empírica.

El proceso de investigación se desarrollará en las siguientes fases:

Revisión bibliográfica. Se trata de identificar y analizar la literatura existente sobre la teoría de modelos y su empleo en la ciencia. Los datos se pueden encontrar en libros, revistas científicas y bases académicas de datos; serán muy útiles las palabras clave enunciadas al principio de este trabajo. Se espera, con ello, elaborar un marco teórico sólido que sustente el análisis e identifique los conceptos principales y los estudios previos que aporten valor al desarrollo del presente informe.

Análisis teórico. Se profundizará en los conceptos de la teoría de modelos y su relación con la consistencia y completitud de las teorías científicas. Para ello, convendrá realizar un análisis crítico y comparativo de los diferentes puntos de vista teóricos encontrados en la literatura., y se discutirá cómo estos se han aplicado a diversas teorías y qué resultados se han obtenido. Se pretende, así, alcanzar una comprensión detallada del modo en que los modelos semánticos consolidan la coherencia interna y la correspondencia con la realidad empírica de las teorías científicas.

Estudios de caso. Aplicar los conceptos teóricos a los estudios de caso, servirá para ilustrar el uso de la teoría de modelos en el momento de evaluar la consistencia y la completitud de las teorías científicas. La manera de conseguirlo consistirá en seleccionar ejemplos representativos de teorías científicas y analizar cómo se han aplicado los modelos semánticos en su desarrollo y validación. La finalidad de ello es que se puedan presentar casos concretos en los que la teoría de modelos haya sido esencial para reforzar la validez de una teoría científica; y también otros casos en los que los obstáculos planteados a la aplicación de los modelos hayan llevado a revisiones o refinamientos de la teoría.

Discusión y análisis crítico. Se trata de evaluar los hallazgos obtenidos en el análisis teórico y en los estudios de caso, así como de discutir las fortalezas y debilidades de la teoría de modelos en la ciencia. El procedimiento consistirá en el análisis crítico de los resultados

obtenidos, habida cuenta de los éxitos y los fracasos y de las implicaciones de los hallazgos en la práctica científica y en la validación de las teorías. El fin de esto es ayudar a generar una discusión enriquecedora acerca del papel de la teoría de modelos en la ciencia, así como destacar las áreas en que se requiera un refuerzo de la investigación o un refinamiento teórico.

Instrumentos y técnicas de recolección de la información:

(a) *Fuentes secundarias* (artículos académicos, libros especializados, actas de conferencias, páginas web).

(b) *Análisis de contenido*. Mediante esta técnica, se examinarán los textos teóricos y los estudios de caso, identificando patrones, conceptos y relaciones entre ellos.

(c) *Análisis de datos*. Será de carácter cualitativo, y se centrará en la interpretación de los conceptos y la evaluación crítica de los estudios de caso seleccionados. Se procurará establecer relaciones entre los modelos semánticos, la consistencia y la completitud de las teorías científicas; al mismo tiempo, se generarán conclusiones basadas en la demostración teórica y en la evidencia empírica.

(d) *Validez y fiabilidad*. Para asegurar la validez y la fiabilidad de la investigación, se contrastarán diversos enfoques y teorías que fortalezcan un entendimiento total de los asuntos tratados.

(e) *Limitaciones teóricas y prácticas*. Se reconocerán las limitaciones inherentes a la investigación teórica, como la dependencia de fuentes secundarias y la subjetividad de la investigación en la interpretación de los conceptos. También se discutirán las posibles limitaciones en la aplicación práctica de la teoría de modelos en campos científicos concretos de señalada complejidad.

(f) *Vías de continuidad*. Por último, quedarán pendientes para otros informes las posibles vías de continuidad de la presente investigación.

(1) Marco teórico

El desarrollo y la validación de las teorías científicas requieren de un marco lógico que garantice su coherencia interna y su capacidad para representar con precisión los fenómenos naturales. La teoría de modelos, como rama de la lógica matemática, proporciona una metodología rigurosa para evaluar la estructura formal de las teorías científicas y determinar su consistencia, completitud y adecuación empírica.

En filosofía de la ciencia, una teoría científica debe ajustarse a los datos observacionales, pero también debe poseer una estructura interna libre de contradicciones y una base lógica que garantice su aplicabilidad en distintos contextos. En este sentido, la teoría de modelos actúa como

un puente entre la sintaxis formal de los sistemas axiomáticos y su interpretación semántica, lo que permite evaluar la validez de los modelos científicos desde una perspectiva matemática y lógica.

A lo largo de la historia de la ciencia, la formalización de las teorías ha sido clave en la construcción del conocimiento. Desde la geometría euclíadiana hasta la teoría cuántica de campos, el uso de modelos ha hecho posible que se verifique la coherencia interna de los sistemas teóricos y su correspondencia con la realidad.

Esta sección tiene como propósito establecer las bases conceptuales de la teoría de modelos y su relevancia en la validación de las teorías científicas. En la sección 1.1, se abordará la teoría de modelos desde una perspectiva general, presentando sus orígenes, sus principios fundamentales y su relación con la lógica matemática. En la sección 1.2, se examinará la forma en que los modelos semánticos estructuran y evalúan las teorías científicas, a la vez que sirven para analizar los conceptos de consistencia, completitud y correspondencia con la realidad empírica. Finalmente, en la sección 1.3 se explorará el papel de la teoría de modelos en la validación de las teorías científicas, considerando su aplicabilidad y limitaciones en distintos contextos.

El análisis presentado en esta sección permitirá comprender cómo la teoría de modelos proporciona un marco formal para evaluar la validez de las teorías científicas y cómo su aplicación varía según el grado de formalización de cada disciplina. Esta base conceptual servirá de fundamento para el desarrollo de las secciones posteriores, en los que se analizarán los desafíos, las barreras y los casos de estudio que ilustran el impacto de la teoría de modelos en la ciencia contemporánea.

La teoría de modelos

La teoría de modelos, en tanto que rama de la lógica matemática, aporta los instrumentos formales necesarios para analizar la estructura interna de las teorías científicas y su capacidad para representar la realidad. En esta sección, se analizan los fundamentos teóricos de la teoría de modelos y se establece la base conceptual sobre la cual se estudiarán sus aplicaciones a la ciencia. De principio a fin, la sección contiene las explicaciones necesarias para comprender cómo la teoría de modelos se une a la lógica matemática con el propósito de evaluar la consistencia, la completitud y la coherencia de las teorías científicas.

Origen y definición de la teoría de modelos. La teoría de modelos se define como el estudio de las relaciones entre las estructuras lógico-matemáticas (modelos) y los sistemas formales que describen dichas estructuras. Los modelos son interpretaciones que dan significado a los enunciados de un lenguaje formal, y la teoría de modelos analiza cómo estos enunciados se comportan bajo diferentes interpretaciones (Chang & Keisler, 1990; Hodges, 2006). Formalmente:

Dado un lenguaje formal L , un modelo para L es una estructura $\mathcal{M} = (D, I)$, donde D es un dominio no vacío e I es una función de interpretación que asigna:

- 1) A cada elemento $c \in L$, un elemento $I(c) \in D$
- 2) A cada símbolo de función f de n entradas, una función $I(f): D^n \rightarrow D$
- 3) A cada símbolo de relación R de m entradas, un subconjunto $I(R) \subseteq D^m$

El origen de la teoría de modelos se remonta a los primeros trabajos sobre lógica y teoría de conjuntos. Leopold Löwenheim, en 1915, y Thoralf Skolem, en 1920, hicieron contribuciones fundamentales al respecto². Más tarde, Alfred Tarski formalizó la noción de verdad en un modelo, con lo que introdujo un marco semántico que afianzó el desarrollo formal de la teoría de modelos en la lógica de primer orden (Tarski, 1956; Väänänen, 2011).

Con el tiempo, la teoría de modelos se ha ido expandiendo hasta incluir el estudio de modelos en las lógicas no clásicas, la modelización de teorías en diferentes campos de la ciencia y el análisis de problemas fundamentales (como la completitud y la consistencia de los sistemas axiomáticos) en la matemática, (Hodges, 2006; Marker, 2002).

Principios básicos de la teoría de modelos. En la teoría de modelos, hay que disponer de lenguajes formales para concretar los enunciados y las fórmulas que se van a interpretar. Los lenguajes formales constan de: símbolos primitivos (constantes, variables, símbolos de funciones y de relaciones, conectores lógicos y cuantificadores) y fórmulas bien formadas (secuencias de los símbolos que cumplen las reglas sintácticas del lenguaje; pueden ser interpretadas en un modelo y evaluadas como verdaderas o falsas). Rigurosamente (Enderton, 2001):

Un lenguaje formal L de primer orden consta de un conjunto de símbolos lógicos:

- a) Un conjunto de símbolos de función $F = \{f_i\}_{i \in I}$
- b) Un conjunto de símbolos de relaciones $R = \{R_j\}_{j \in J}$
- c) Un conjunto de símbolos de constantes $C = \{c_k\}_{k \in K}$
- d) Símbolos lógicos comunes: $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee$, paréntesis, variables

Pero un lenguaje formal es más que una mera colección de símbolos: es un sistema que permite expresar propiedades, relaciones y funciones de manera no ambigua, al mismo tiempo que facilita la interpretación en modelos matemáticos (Borzacchini, 2018; Enderton, 2001).

² Entre ellas, el teorema de Löwenheim-Skolem, que establece la existencia de modelos de diferentes cardinalidades para teorías satisfacibles.

Por su lado, un modelo semántico es una estructura matemática que da significado a los enunciados de un lenguaje formal. Dicho modelo consta de un dominio o conjunto de elementos cuyas variables son interpretadas. Y posee, además, una interpretación de las funciones y de las relaciones; de modo que, a cada símbolo de función, se le asigna una función en el dominio; y a cada símbolo de relación, se le asigna un subconjunto del dominio.

La evaluación de la verdad de una fórmula en un modelo depende de esta interpretación. Así, la semántica de un lenguaje formal en la teoría de modelos es primordial para determinar la validez de los enunciados y la coherencia de las teorías formales que los contienen (Button & Walsh, 2018; Hodges, 2006).

Además, la interpretación de un lenguaje formal dentro de un modelo es lo que otorga significado a sus fórmulas. A través de esta interpretación, las constantes se asignan a elementos específicos del dominio; las funciones se interpretan como operaciones en el dominio; y las relaciones, como conjuntos de tuplas en el dominio.

El significado de una fórmula F se define como el conjunto de todos los modelos en los que F es verdadera. Esta perspectiva hace de la teoría de modelos un poderoso recurso para el análisis semántico de las teorías científicas, siendo determinante para que sus enunciados tengan sentido dentro de un marco formal determinado, y que sean aplicables y verificables empíricamente (Manzano, 1996; Väänänen, 2011).

Un ejemplo ilustrativo de modelo formal lo proporciona la teoría de conjuntos, mediante la cual se puede estudiar la estructura de los conjuntos y las operaciones elementales en ellos (unión, intersección y diferencia de conjuntos). Considérese, en efecto, un lenguaje formal L que tiene un único símbolo no lógico \subset (inclusión). El modelo M de la teoría de conjuntos no es más que un dominio D y una relación binaria R tal que $R(X, Y)$ es verdadera si y sólo si $X \subset Y$. Gracias a este modelo, es posible formular y evaluar proposiciones sobre conjuntos, como:

$$\forall X, \exists Y \mid X \subset Y$$

Pero los lenguajes no son meras construcciones abstractas, sino que cobran significado cuando se interpretan en modelos matemáticos que les otorgan validez y aplicación en contextos concretos.

Conceptos clave en la teoría de modelos

Satisfacibilidad. Se trata de un concepto central en la teoría de modelos y en la lógica matemática. Una fórmula es satisfacible si existe al menos un modelo en el que la fórmula es verdadera; en caso contrario, se dice que la fórmula es no satisfacible, lo que conlleva a una contradicción en la teoría. El concepto de satisfacibilidad está intrínsecamente relacionado con el teorema de Löwenheim-Skolem, que establece que, si una teoría de primer orden tiene un modelo infinito, entonces tiene

modelos de todas las cardinalidades infinitas. Este teorema tiene importantes implicaciones en la comprensión de la diversidad de los modelos que pueden satisfacer una teoría determinada (Chang & Keisler, 1990; Hodges, 2006).

Completitud. Una teoría es completa si toda fórmula del lenguaje, o bien la negación de dicha fórmula, es derivable de los axiomas de la teoría. Es decir, si no hay enunciados indecidibles en una teoría completa. Este concepto es de primera importancia en la teoría de modelos, pues viene a decir que el sistema formal tiene la capacidad de decidir la verdad de cualquier enunciado en su lenguaje. Así, el teorema de completitud de Gödel establece que, si una fórmula es verdadera en todos los modelos de una teoría de primer orden, entonces es demostrable en el sistema axiomático de esa teoría. La trascendencia de este resultado radica en que conecta la semántica, o verdad en todos los modelos, con la sintaxis, o demostrabilidad en un sistema formal (Enderton, 2001; Gödel, 1931).

Consistencia. La consistencia es la propiedad de no permitir la derivación de una contradicción en una teoría. En términos de la teoría de modelos, una teoría es consistente si tiene al menos un modelo, lo que significa que es satisfacible. La importancia de la consistencia en la ciencia y la lógica matemática es palmaria: si una teoría es inconsistente, puede derivarse cualquier enunciado dentro de ella, lo que la hace inútil para la ciencia. La consistencia relativa también es un concepto clave; se utiliza para demostrar que la consistencia de una teoría depende de la consistencia de otra teoría más fundamental (Borzacchini, 2018; Kunen, 1980)

Equivalencia e isomorfismo de modelos. La equivalencia de modelos se refiere a la situación en que dos modelos satisfacen exactamente las mismas fórmulas de un lenguaje. Dos modelos son equivalentes si no hay ninguna fórmula que sea verdadera en uno y falsa en otra. El isomorfismo entre dos modelos va un paso más allá: dos modelos son isomorfos si existe una correspondencia biunívoca entre sus elementos, de suerte que preserva la estructura del modelo; es decir, las relaciones y operaciones definidas en el modelo son idénticas en ambos casos, lo que hace que los modelos sean indistinguibles en términos de la teoría de modelos. Este concepto es crucial en el estudio de la unicidad de los modelos de las teorías formales (Button & Walsh, 2018; Hodges, 2006).

Formalmente, dos modelos \mathcal{M}, \mathcal{N} para un mismo lenguaje L son equivalentes ($\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$) si satisfacen exactamente las mismas fórmulas de L . Por añadidura, se dice que \mathcal{M}, \mathcal{N} son isomorfos ($\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$) si existe una biyección $f: D_{\mathcal{M}} \rightarrow D_{\mathcal{N}}$ tal que para cada relación R y toda función g en L , se cumple que:

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) \in I_{\mathcal{M}}(R) \Leftrightarrow (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)) \in I_{\mathcal{N}}(R) \quad [1]$$

$$I_{\mathcal{N}}(g)(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k)) = f(I_{\mathcal{M}}(g)(a_1, a_2, \dots, a_k)) \quad [2]$$

Relación entre teoría de modelos y lógica matemática. La teoría de modelos es una parte esencial de la lógica matemática, pero también actúa como un puente entre las matemáticas puras y las ciencias empíricas. Mientras que la lógica matemática se centra en la estructura formal de los sistemas axiomáticos, la teoría de modelos procura los medios semánticos necesarios para interpretar y analizar estos sistemas en términos de modelos concretos. A este respecto, se puede definir formalmente qué significa que una fórmula sea satisfacible en un modelo, y qué significa la noción de verdad en un modelo (Manzano, 1996; Marker, 2002):

Sea $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una fórmula de primer orden con variables libres x_1, x_2, \dots, x_n . Se dice que φ es satisfacible en un modelo \mathcal{M} si existe una valoración $v: \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow D$ tal que $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$; es decir, la interpretación de φ en \mathcal{M} bajo v es verdadera.

En matemáticas, la teoría de modelos se emplea para investigar la estructura y las propiedades de los modelos de diferentes teorías matemáticas, como la aritmética, la teoría de conjuntos y la geometría. En las ciencias naturales y sociales, la teoría de modelos formaliza las teorías complejas y garantiza que éstas sean lógicamente consistentes y completas, lo que es esencial para su aplicabilidad empírica.

Además, la teoría de modelos es manifiestamente idónea en la comprensión de fenómenos complejos y en el análisis de teorías alternativas en física y biología; de hecho, la teoría de modelos ofrece un marco formal para comparar y contrastar teorías que aparentemente describen el mismo fenómeno, pero desde diferentes perspectivas (Borzacchini, 2018; Marker, 2002).

La teoría de modelos en el contexto científico

La teoría de modelos es relevante en la formalización y el análisis de las teorías científicas. En esta sección, se estudia cómo los principios de la teoría de modelos estructuran y evalúan las teorías científicas, además de ocuparse de cuestiones como la consistencia, la completitud y la correspondencia con la realidad empírica. También se examinan las limitaciones inherentes al vínculo entre los modelos teóricos y los fenómenos del mundo real, lo que se ilustra mediante algunos ejemplos de la física teórica. Esto revela, una vez más, la función indispensable que ejerce la teoría de modelos en la ciencia contemporánea, sobre todo en áreas en las que la precisión y la validación empírica son esenciales.

Formalización de las teorías científicas

La formalización de las teorías científicas es un proceso que facilita la traducción de las ideas abstractas de los lenguajes formales y matemáticos. Este proceso es crucial en aras de la claridad, la precisión y la comunicación de las teorías científicas. Mediante la formalización, los científicos pueden definir con exactitud los conceptos clave, establecer

axiomas y derivar consecuencias lógicas comparables con las observaciones empíricas.

En este contexto, la teoría de modelos arriba a un marco estructurado que evalúe si una teoría es coherente y si sus predicciones son derivables de los axiomas. También permite el examen de la relación entre diferentes teorías y la posible equivalencia entre ellas; o bien si una es más potente que la otra en términos de su capacidad para describir el mundo (Carnap, 1956; Suppes, 2002)

Por otra parte, los lenguajes formales en la ciencia son esenciales para expresar teorías de manera no ambigua, pues ayudan a replicar y verificar los resultados. Los lenguajes formales constan de simbolismo matemático y de representaciones específicas adaptadas a disciplinas particulares, como la notación tensorial en la relatividad general o las matrices de transición en la teoría de sistemas dinámicos. He aquí algunos ejemplos:

En física teórica, los lenguajes formales describen los fenómenos de manera precisa. La relatividad general, por ejemplo, se expresa en términos de la geometría diferencial; mientras que la mecánica cuántica se sirve de operadores en los espacios de Hilbert. Por mor de estos lenguajes, se pueden derivar predicciones susceptibles de contrastar con posteriores experimentos (Dirac, 1958).

En biología, los modelos matemáticos, como las ecuaciones diferenciales de la dinámica poblacional o las cadenas de Markov de la genética, se revisten de gran importancia para comprender y predecir el comportamiento de los sistemas biológicos complejos. Los lenguajes formales modelan la evolución de las especies, la propagación de las enfermedades y la dinámica de los ecosistemas (Murray, 2002).

La construcción de modelos científicos, pues, implica la creación de representaciones matemáticas que aprehendan la esencia de los fenómenos. Estos modelos son potentes utensilios a la hora de hacer predicciones, probar hipótesis y sondear nuevas teorías.

Consistencia y completitud de las teorías científicas

La consistencia, junto con la completitud de una teoría científica, son dos propiedades que determinan la robustez y la capacidad de ésta para representar la realidad de manera precisa. La teoría de modelos se presenta como un valioso instrumento para evaluar y garantizar estas propiedades.

En efecto, para evitar las contradicciones lógicas, es esencial que las teorías científicas sean coherentes. En física, por ejemplo, la unificación de las teorías como la relatividad general y la mecánica cuántica supone un desafío enorme; de hecho, estas teorías, aunque son exitosas en sus respectivos dominios, tienen estructuras matemáticas difícilmente reconciliables (Hawking & Ellis, 1973). En biología, por su parte, se requiere de coherencia interna para garantizar que los modelos

de los procesos biológicos sean compatibles con las leyes de la física y de la química; así, para ser considerados como válidos, los modelos de redes metabólicas deben estar de acuerdo con los principios de la termodinámica (Alberts et al., 2014).

He aquí algunos ejemplos más de teorías científicas consistentes y completas:

La teoría general de la relatividad es un ejemplo paradigmático de consistencia y capacidad a fin de aplicarla en una gran variedad de contextos. Su coherencia interna y las predicciones, como la curvatura de la luz en las inmediaciones de los cuerpos masivos, han sido confirmadas experimentalmente, lo que prueba su validez (Weinberg, 1995).

La teoría cuántica de campos se emplea para describir la física de partículas fundamentales, y ha demostrado ser muy exitosa en cuanto a la verificación experimental de las predicciones (Peskin & Schroeder, 1995). Sin embargo, su completitud continúa siendo un reto, debido a la naturaleza múltiple de las interacciones entre las partículas.

Correspondencia entre modelos y realidad empírica

Uno de los aspectos más importantes de la teoría de modelos es la correspondencia entre los modelos matemáticos y la realidad empírica. Un modelo puede ser internamente coherente, si bien su utilidad depende de la capacidad para representar fielmente la realidad.

En este sentido, los modelos semánticos se sitúan en un lugar central de la validación de las teorías científicas. Estos modelos se revisten de una estructura interna útil para interpretar los lenguajes formales y verificar la veracidad de los enunciados científicos en determinado contexto empírico. La validación implica la comparación de las predicciones derivadas del modelo con los datos observados y con los experimentos.

En cosmología, por ejemplo, los modelos basados en la relatividad general y la teoría de la inflación cósmica son validados mediante observaciones como la radiación cósmica de fondo y la distribución de las galaxias (Mukhanov, 2005).

Pero, aunque los modelos científicos sean herramientas poderosas, también tienen limitaciones significativas. De hecho, ningún modelo puede captar completamente la complejidad del mundo real; es más, todos los modelos son, en cierta medida, simplificaciones de la realidad. Estos son algunos de los problemas que más acucian a la teoría de modelos:

Problemas de escalabilidad. Algunos modelos, como los empleados en la física de partículas, son precisos a escalas subatómicas, pero no se aplican a escalas macroscópicas (Peskin & Schroeder, 1995).

Problemas de complejidad. En biología, los modelos matemáticos suelen simplificar los sistemas complejos, como los ecosistemas o los

sistemas neuronales. Estas simplificaciones pueden llevar a errores si no se consideran adecuadamente las interacciones complejas y los factores ambientales (Murray, 2002).

En la física teórica, por su lado, la teoría de cuerdas es un ejemplo de cómo un modelo matemático puede ser internamente consistente, pero difícil de evaluar empíricamente, debido a la falta de predicciones comprobables con la tecnología actual. Como es sabido, en este marco teórico se intenta unificar todas las fuerzas fundamentales de la naturaleza, pero su validación empírica sigue siendo un reto hasta ahora insalvable.

Otro caso bien conocido es el modelo estándar de partículas subatómicas, que ha gozado de gran éxito al hacer predicciones que se han podido verificar experimentalmente. Sin embargo, este modelo se enfrenta a problemas de consistencia cuando se intenta reconciliarlo con la relatividad general (Weinberg, 1995).

Empleo de la teoría de modelos en la validación de teorías

La validación de las teorías científicas, como se ha venido repitiendo una y otra vez, hace que las predicciones generadas por éstas concuerden con la realidad empírica. La teoría de modelos ofrece, precisamente, un contexto riguroso para evaluar la validez de dichas teorías mediante la construcción de representaciones fieles de los sistemas estudiados. En este sentido, se considera que un modelo científico es válido si las predicciones derivadas de él son consistentes con los resultados experimentales o con las observaciones empíricas.

Los modelos matemáticos de la física cuántica adquieren una singular importancia cuando se trata de predecir fenómenos que, aunque vayan en contra de la intuición, han sido confirmados por los experimentos; ahí está, por ejemplo, el caso del entrelazamiento cuántico (Nielsen & Chuang, 2010).

Métodos de validación basados en modelos

Los métodos de validación basados en modelos son diversos, y están diseñados con el propósito de que las teorías científicas sean coherentes y aplicables a los fenómenos reales. He aquí algunos de ellos:

Modelos semánticos. Estos modelos proporcionan una interpretación de los conceptos teóricos y de los datos empíricos. En física teórica, por ejemplo, los modelos semánticos contribuyen a interpretar fenómenos naturales como los agujeros negros o la expansión acelerada del universo (Penrose, 2004).

Prueba de satisfacibilidad. Este método consiste en verificar si un conjunto de ecuaciones de una teoría científica tiene al menos un modelo en el que todas las proposiciones sean verdaderas. De ahí que una teoría sea satisfacible si es potencialmente aplicable a algún aspecto del mundo real (Hodges, 2006).

Verificación de la consistencia. La consistencia es la ausencia de contradicciones en una teoría. En la práctica, verificar la consistencia de una teoría significa asegurarse de que no se derivan afirmaciones contradictorias dentro de un modelo concreto; lo cual es particularmente importante en las teorías matemáticas aplicadas a la física, pues las contradicciones podrían señalar errores notables (Enderton, 2001).

Consistencia de las teorías matemáticas aplicadas a la ciencia

Si las teorías matemáticas aplicadas a la ciencia son consistentes, entonces las predicciones realizadas por dichas teorías son coherentes y no contienen contradicciones. En la física, por ejemplo, la consistencia matemática asegura que las ecuaciones que describen los fenómenos físicos carezcan de contradicciones en diversos contextos y escalas.

Otro ejemplo de la importancia de la consistencia de las teorías matemáticas lo proporciona la mecánica cuántica; en ésta, cualquier inconsistencia podría llevar a la predicción de partículas cuya existencia es imposible, o de fenómenos que de ningún modo se observan en la naturaleza. La teoría de modelos se emplea, entonces, para verificar que las diferentes partes de una teoría matemática sean consistentes entre sí y con las observaciones experimentales (Peskin & Achroeder, 1995).

Teoría de modelos, predicción y falsabilidad científica

La predicción y la falsabilidad son dos elementos básicos del método científico. La teoría de modelos interviene en ambos aspectos, pues genera una estructura formal mediante la cual se pueden efectuar predicciones; simultáneamente, establece criterios claros y precisos para la falsabilidad.

A través de los modelos predictivos, se puede anticipar la ocurrencia de fenómenos antes de que sean observados. Un modelo predictivo debe ser consistente; es decir, sus predicciones han de estar exentas de contradicciones y deben guardar una correspondencia con las observaciones empíricas. En cosmología, por ejemplo, los modelos predictivos han hecho posible que se pueda anticipar la existencia de la radiación de fondo de microondas, lo que viene a confirmar el modelo del Big Bang (Mukhanov, 2005).

La falsabilidad, como es bien sabido, es la idea de que una teoría debe ser susceptible de ser refutada por la evidencia empírica. La teoría de modelos contribuye a la falsabilidad, pues erige modelos semánticos que se pueden comparar con la realidad observada. Si las predicciones de un modelo no concuerdan con los datos empíricos, entonces la teoría subyacente ha de ser revisada o, en su caso, descartada. Un claro ejemplo de esto es la teoría de la relatividad general, que ha pasado por numerosas pruebas de falsabilidad a lo largo del siglo XX; una de sus más acertadas previsiones es la curvatura de la luz en las inmediaciones del Sol (Hawking, 2001).

Estos casos ilustran cómo la teoría de modelos proporciona un marco conceptual para la validación científica, a la vez que aporta procedimientos para evaluar las teorías.

Éxito y fracaso de la teoría de modelos

La mecánica cuántica ha sido uno de los mayores éxitos de la aplicación de la teoría de modelos en la ciencia. Desde sus inicios, ha sido capaz de efectuar predicciones acertadas, y posteriormente validadas, sobre los fenómenos subatómicos. Los modelos matemáticos coadyuvaron al desarrollo de una teoría coherente y consistente que describe el comportamiento de las partículas en el nivel cuántico (Nielsen & Chuang, 2010).

En contraste, las teorías unificadas de la naturaleza, como la teoría de cuerdas y la de gravedad cuántica, se han encontrado con obstáculos hasta ahora insalvables. Aunque estas teorías son matemáticamente consistentes y prometen unificar todas las fuerzas fundamentales de la naturaleza, la falta de falsabilidad y de predicciones verificables a corto plazo las han dejado en una posición incierta dentro de la física teórica (Green, Schwarz & Witten, 2012).

Balance provisional

A lo largo de esta sección, se ha expuesto el papel central de la teoría de modelos en la lógica matemática, así como su impacto en la formulación y validación de las teorías científicas. Se han presentado sus fundamentos teóricos, desde los orígenes históricos hasta los desarrollos más recientes, y se ha analizado su aplicabilidad en el ámbito científico.

Primero, se ha definido la teoría de modelos como una rama de la lógica matemática que estudia la relación entre las estructuras formales y sus interpretaciones semánticas. Se han explicado conceptos como satisfacibilidad, consistencia, completitud, equivalencia e isomorfismo de modelos, destacando su importancia en la evaluación de los sistemas formales y su papel en la estructuración del conocimiento científico.

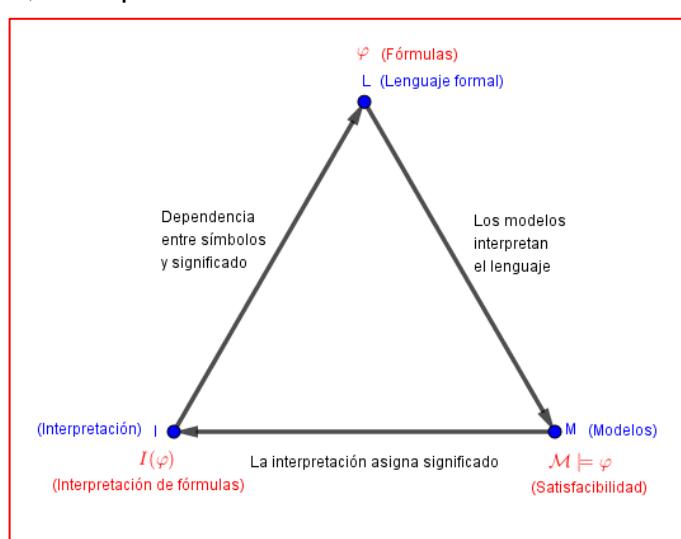
Posteriormente, se ha examinado cómo los modelos semánticos proporcionan un marco riguroso para la validación de las teorías científicas. Se ha establecido la diferencia entre verdad formal y verdad empírica, realzando que, aunque una teoría sea internamente consistente, su validez científica depende de la correspondencia con los datos experimentales. Se han discutido ejemplos paradigmáticos en física, química y biología, evidenciando cómo la adecuación de un modelo depende tanto de su estructura lógica como de su capacidad predictiva.

Finalmente, se ha analizado la función de la teoría de modelos en la validación científica, abordando su relación con la falsabilidad y la predicción. Y se ha destacado que, si bien los modelos matemáticos han sido exitosos en diversas disciplinas, hay límites inherentes a la capacidad de la teoría de modelos para representar sistemas complejos, especialmente en áreas como la biología y la economía.

Los resultados expuestos en esta sección permiten extraer varias conclusiones preliminares:

La primera es que la teoría de modelos sirve para evaluar la estructura formal de las teorías científicas, pues dictamina su coherencia interna y consistencia lógica. A continuación, la correspondencia entre los modelos teóricos y la realidad empírica no siempre es directa; esto plantea desafíos en la validación científica, especialmente en disciplinas con alta complejidad. Además, el grado de formalización de una disciplina influye en la aplicabilidad de la teoría de modelos. Mientras que en matemáticas y física su uso es directo, en biología y economía se enfrenta a barreras que requieren enfoques complementarios. Por último, la teoría de modelos valida las teorías científicas y detecta sus limitaciones, lo que facilita la evolución del conocimiento científico

revisión
de los
teoría
por
revele
medio
pero no
de
Su
continuo
con



mediante la
y el
refinamiento
modelos.

La
de modelos,
tanto, se
como un
poderoso,
está exenta
limitaciones.
estudio
y su
integración
otros

enfoques matemáticos y computacionales, muy bien podrían contribuir a obtener una comprensión más profunda de la relación entre las estructuras formales y la realidad científica.

Figura 1: Relación entre lenguaje formal, modelos e interpretación. Elaboración propia.

Como complemento a lo anterior, la figura 1 ilustra uno de los conceptos básicos de la teoría de modelos: el vínculo entre la estructura sintáctica de un lenguaje formal y su significado en términos de modelos semánticos. La figura sugiere que: un lenguaje formal puede generar múltiples modelos; algunas teorías pueden carecer de modelos válidos; el proceso de interpretación establece una correspondencia entre teorías científicas y realidad empírica. La tabla 1 (apéndice 2) resume los contenidos de la sección.

(2) Barreras y desafíos de la teoría de modelos

La aplicabilidad de la teoría de modelos no está exenta de trabas. Esta sección sondea los retos a los que se enfrenta la teoría de modelos cuando se aplica a la ciencia; y aborda cuestiones como la representación de la realidad, las tensiones entre consistencia formal y veracidad empírica, la incompletitud en los modelos científicos y las dificultades que la complejidad impone a dicha aplicabilidad. Estos aspectos son muy importantes para comprender el alcance y los límites de la teoría de modelos en la ciencia contemporánea.

Límites de la teoría de modelos en la representación de la realidad

La teoría de modelos se basa en la abstracción matemática para construir representaciones de sistemas reales. Sin embargo, una de sus principales limitaciones es que esas representaciones pueden ser intrínsecamente incompletas o distorsionadas. Esto se debe a que cualquier modelo formal es, por definición, una simplificación de la realidad. Los modelos científicos, a menudo, ignoran ciertos detalles o suponen condiciones ideales que no se encuentran en la naturaleza. Por ejemplo, en la mecánica clásica, los modelos tienden a asumir sistemas sin fricción o con masas puntuales, lo que simplifica las ecuaciones, pero no refleja la complejidad del mundo real.

Además, los límites del lenguaje formal utilizado en la construcción de modelos impiden que estos retraten toda la riqueza de los fenómenos observados. En particular, en la física cuántica, los fenómenos como el entrelazamiento o la superposición suponen un reto a las representaciones clásicas, y obligan a repensar las relaciones entre modelo y realidad. (Redhead, 1980). Este problema se agrava en disciplinas como la biología o las ciencias sociales, en las que los sistemas son tan complejos y dinámicos que los modelos matemáticos existentes no pueden hacerse cargo de todos los aspectos relevantes.

Otra dimensión de este problema es la diferencia entre modelos predictivos y modelos descriptivos. Un modelo descriptivo trata de representar fielmente el fenómeno, mientras que un modelo predictivo se cierne a anticipar futuros fenómenos, para lo que se basa en los patrones

observados. La teoría de modelos puede ser efectiva en la construcción de modelos predictivos, pero su capacidad para representar con precisión la totalidad de un fenómeno puede ser limitada. Esto es evidente en áreas como la economía; en efecto, los modelos predictivos pueden fallar en períodos de crisis, pues las dinámicas subyacentes cambian de modo abrupto en ellos (Kay, 2015).

Consistencia formal frente a veracidad empírica

Uno de los principales aportes de la teoría de modelos es su capacidad para revelar inconsistencias internas en las teorías científicas. Si una teoría no posee ningún modelo en el que todas sus afirmaciones sean simultáneamente verdaderas, se considera inconsistente. Formalmente, una teoría T expresada en un lenguaje formal L es inconsistente si, para todo modelo \mathcal{M} , al menos una de las formas axiomáticas resulta falsa en \mathcal{M} . Este criterio es muy importante en la evaluación de teorías científicas altamente formales.

Como casos notables de inconsistencia mostrada por modelos semánticos, se encuentran ciertos enfoques de la teoría cuántica de campos. En su formulación inicial, algunas versiones del modelo de interacciones de partículas daban lugar a integrales divergentes, lo que llevaba a que ciertas cantidades físicas predijeran valores infinitos; es decir, se producía una inconsistencia matemática (Peskin & Schroeder, 1995). Para abordar este problema, se desarrollaron técnicas para redefinir los parámetros fundamentales (Weinberg, 1995).

Otro ejemplo significativo es la incompatibilidad entre la mecánica cuántica y la relatividad general. Ambas teorías han sido exitosas en sus respectivos dominios, pero cuando se intenta combinarlas en un marco semántico único, aparecen paradojas que indican posibles inconsistencias. Por ejemplo, en la formulación de la gravedad cuántica, los operadores cuánticos asociados con la curvatura del espacio-tiempo carecen de una estructura de modelo bien definida (Penrose, 2004). Esto sugiere que, en su formulación actual, no existe un modelo semántico unificado que satisfaga simultáneamente los principios fundamentales de ambas teorías.

Una manera de demostrar que una teoría es inválida en todos los modelos posibles consiste en la construcción de un contraejemplo semántico. Si con una teoría T se quiere describir un fenómeno en todos los modelos de una estructura matemática dada, pero se encuentra un modelo \mathcal{M} en el que una fórmula φ de T es falsa, entonces T no es válida. Este procedimiento es común en lógica matemática, y se puede utilizar, por ejemplo, en la demostración de que no toda teoría de la gravedad cuántica es consistente con la teoría estándar de partículas (Schwarz & Witten, 2012). Estos contraejemplos han servido para modificar y refinar las formulaciones existentes, guiando la búsqueda de una teoría consistente de la gravedad cuántica.

También es digno de mención el caso de los modelos económicos. En estos, los supuestos de racionalidad perfecta y mercados eficientes

son consistentes desde un punto de vista formal; pero la crisis financiera global de 2008 demostró que dichos modelos no retratan adecuadamente las dinámicas del mercado real. Lo que pone de relieve el hecho de que la consistencia formal no siempre conduce a la veracidad empírica, y de ahí la necesidad de revisar y adaptar los modelos en función de la evidencia observacional.

Discusión sobre la incompletitud en los modelos científicos

En la teoría de modelos, la incompletitud es una señal de las limitaciones inherentes a cualquier sistema formal. El teorema de incompletitud de Gödel muestra que, en cualquier sistema formal suficientemente complejo, existen proposiciones que no pueden ser demostradas ni refutadas dentro del propio sistema. Este resultado tiene profundas derivaciones para la ciencia, ya que sugiere que siempre habrá aspectos de la realidad que se escapan de la formalización completa.

En la física, por ejemplo, la incompletitud se manifiesta en la dificultad de unificar la relatividad general y la mecánica cuántica en una teoría coherente. Ambas teorías han tenido un éxito extraordinario en sus dominios respectivos, pero los intentos de combinar sus principios en una teoría del todo han encontrado barreras teóricas hasta ahora inexpugnables. Este problema, por lo demás, ilustra cómo la incompletitud puede obstaculizar la comprensión y el modelado del universo (Penrose, 2004).

En biología, la incompletitud se manifiesta en la dificultad para modelar procesos biológicos complejos, como la evolución o el desarrollo celular. A pesar de los avances en biología matemática, la riqueza y la variabilidad de los fenómenos biológicos a menudo rebasan la capacidad de los modelos actuales para dar explicaciones completas y predictivas (Kitano, 2002).

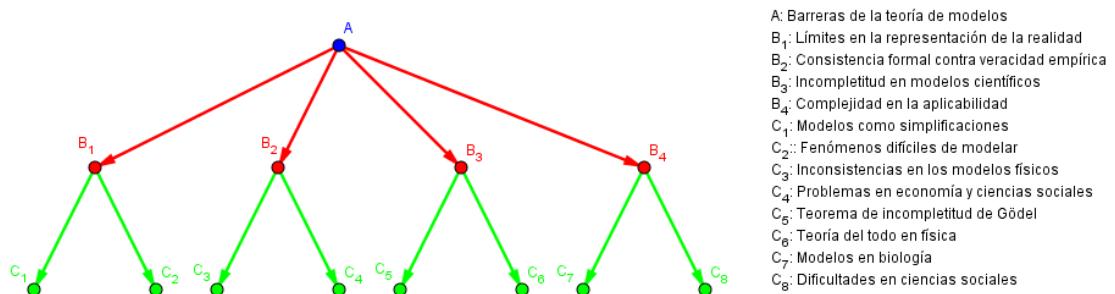
Complejidad en la aplicación de la teoría de modelos

A medida que los sistemas que se intenta modelar se vuelven más complejos, las limitaciones de la teoría de modelos se hacen más evidentes. En sistemas simples, como los descritos por la mecánica clásica, los modelos pueden ser extremadamente precisos y útiles. Pero, cuando la ciencia se enfrenta a los sistemas complejos, con múltiples variables interdependientes y comportamientos no lineales, la construcción de modelos efectivos se convierte en un desafío de colosales proporciones.

En biología, la complejidad del objeto de estudio puede superar las capacidades de los modelos matemáticos tradicionales. Los ecosistemas y las redes neuronales son tan complejos que cualquier modelo que se construya será una simplificación de la realidad; irremediablemente, por lo tanto, se perderán aspectos críticos de ésta. La biología de sistemas ha intentado abordar estos problemas mediante enfoques que combinan las

matemáticas con la computación y la biología, pero se sigue enfrentando a retos enormes.

En las ciencias sociales, la complejidad es aún más pronunciada



debido a la influencia de factores culturales, económicos y políticos que interactúan de manera impredecible. Los modelos que intentan prever los fenómenos económicos o los comportamientos sociales, a menudo fallan a causa de la dificultad de captar la dinámica completa de los sistemas humanos. La teoría de juegos y la economía conductual han intentado incorporar más realismo a los modelos económicos, pero la complejidad intrínseca a las interacciones humanas sigue siendo un obstáculo (Kay, 2015).

Las dificultades para representar íntegramente la realidad, la tensión entre consistencia formal y verdad empírica, la incompletitud propia de los modelos científicos y los retos que plantea la complejidad, ponen de manifiesto la necesidad de disponer de un enfoque crítico y reflexivo a la hora de aplicar la teoría de modelos a la ciencia. Estos desafíos, que siguen el orden jerárquico visualizado en la figura 2, invitan a buscar puntos de vista complementarios y a reconocer las limitaciones de cualquier sistema formal que intente retratar la realidad en su totalidad.

Figura 2: Jerarquía de las barreras de la teoría de modelos en la ciencia. Elaboración propia.

(3) Estudios de caso

Esta sección se centra en la aplicación práctica de la teoría de modelos a varias áreas fundamentales de la ciencia: relatividad general, mecánica cuántica, química cuántica, geología, dinámica de poblaciones y economía matemática. Se espera que este estudio aporte una visión general de cómo los conceptos de consistencia, completitud, validez y correspondencia con la realidad empírica se aplican con éxito en las mencionadas áreas. A través de estos ejemplos, se analizarán los éxitos y los fracasos, así como los retos a que se enfrentan las teorías, en lo que se refiere a su formalización y a su aplicación práctica.

Relatividad general

La teoría de la relatividad general describe la gravitación como la curvatura del espacio-tiempo, debido a la presencia de masa y energía. Esta teoría se formaliza matemáticamente por medio de la geometría diferencial y de un lenguaje tensorial que incluye el tensor métrico, el de Ricci y el de energía-momento; todos ellos están gobernados por las ecuaciones de campo de Einstein y por una variedad diferenciable de la métrica de Riemann. (Hawking & Ellis, 1973; Weinberg, 1972; Will, 2018).

Análisis de los conceptos intervenientes:

Consistencia. La teoría es consistente siempre que las ecuaciones de campo de Einstein no generen contradicciones internas y tengan la misma forma en todos los sistemas de referencia. Esta consistencia ha sido demostrada en numerosos contextos, como la descripción de las órbitas planetarias y la curvatura de la luz en presencia de un campo gravitatorio.

Compleitud. La relatividad general se enfrenta a problemas de completitud en casos singulares, como el de los agujeros negros, donde las ecuaciones de Einstein sugieren densidades infinitas; esto es un indicio de que la teoría de la relatividad podría no ser completa en cuanto a la descripción de todos los fenómenos gravitacionales.

Correspondencia con la realidad empírica. La relatividad general ha sido validada empíricamente mediante experimentos como la observación de la precesión del perihelio de Mercurio y la confirmación de la existencia de ondas gravitacionales; y también mediante el modelo de Schwarzschild, que describe la métrica de un agujero negro y permite predecir fenómenos como el de horizonte de sucesos y el de efecto de lente gravitacional. Esta correspondencia robusta entre el modelo formal y la realidad física observada respalda la utilidad y la exactitud de la teoría.

Limitaciones del modelo. Las dos limitaciones principales de la teoría de la relatividad son: que no se acopla de manera natural con la mecánica cuántica y que presenta singularidades, como la del interior de los agujeros negros. Esto sugiere que el modelo es incompleto, pues la consistencia formal de la teoría no implica su aplicabilidad empírica en todos los contextos físicos.

Mecánica cuántica

La mecánica cuántica se formaliza mediante la teoría de operadores en espacios de Hilbert y las ecuaciones diferenciales. Los estados cuánticos se representan por medio de vectores en estos espacios, y las observables físicas se describen a través de operadores lineales adjuntos; en este contexto, el principio de superposición afirma que cualquier combinación lineal de estados cuánticos también es un estado cuántico. La función de onda descrita por la ecuación de Schrödinger es central en la formalización de los sistemas cuánticos; y la regla de Born define la probabilidad de medición del cuadrado del módulo

de la función de onda (Nielsen & Chuang, 2010; Griffiths & Schroeter, 2018).

Análisis de los conceptos intervinientes:

Consistencia. La mecánica cuántica es consistente dentro de su propio marco, en el sentido de que efectúa predicciones coherentes de una amplia gama de fenómenos físicos, desde la estructura atómica hasta la superconductividad.

Completitud. La mecánica cuántica ha sido objeto de debate en cuanto a su completitud, debido a las interpretaciones del colapso de la función de onda y el problema de la medición. Las diferentes interpretaciones, como la de Copenhague y los mundos posibles, intentan examinar este problema desde distintos ángulos.

Correspondencia con la realidad empírica. A pesar de los desafíos interpretativos, la mecánica cuántica ha demostrado tener una correspondencia excepcional con la realidad empírica. Experimentos como el efecto fotoeléctrico y la interferencia de electrones han corroborado las predicciones cuánticas, con lo que esta teoría ha logrado consolidar su posición como una de las más precisas de la ciencia; por otro lado, el experimento de la doble rendija, que muestra la interferencia cuántica entre las partículas, desafía la noción clásica de trayectoria.

Limitaciones del modelo. Sin embargo, la mecánica cuántica no explica la transición entre el mundo cuántico y el clásico; y da lugar a problemas de interpretación, como la medida y la coherencia, pues es difícil explicar cómo la superposición de estados colapsa en un único resultado observado. Aun así, desde la teoría de modelos, se han desarrollado enfoques alternativos. En efecto, la lógica cuántica (Birkhoff & Neumann, 1936) modifica las reglas de la lógica proposicional para adaptarlas al comportamiento cuántico. Con todo, aunque la lógica cuántica preserve la consistencia matemática, no resuelve completamente el problema de la correspondencia con la realidad empírica.

Química cuántica

La química cuántica se basa en la aplicación de los principios de la mecánica cuántica al estudio y la predicción de las propiedades de los átomos y las moléculas. Los modelos cuánticos, como el de los orbitales moleculares, emplean funciones de onda para describir los estados electrónicos de una molécula y predecir algunas propiedades, como la energía de enlace, los espectros atómicos y la reactividad química. La ecuación de Schrödinger, en su versión dependiente del tiempo, es fundamental para este campo; también lo son el álgebra lineal, la teoría de las perturbaciones, los modelos de orbitales moleculares y los métodos numéricos (Levine, 2020).

Análisis de los conceptos intervinientes:

Consistencia. Los modelos de la química cuántica son consistentes en el sentido de que pueden predecir las propiedades químicas de las moléculas, como sus energías de enlace, las geometrías moleculares y los espectros de absorción-emisión.

Compleitud. Los modelos de la química cuántica no siempre son completos. La teoría de las perturbaciones y los métodos aproximativos, como la teoría de la función de densidad, son necesarios para manejar sistemas complejos; esto es un indicio de las limitaciones existentes en la descripción de la realidad química.

Correspondencia con la realidad empírica. La química cuántica ha sido validada empíricamente a través de su capacidad para predecir propiedades moleculares que se observan experimentalmente. Por ejemplo, la predicción de la estructura del benceno como un anillo resonante de seis carbonos fue un éxito temprano que confirmó la validez de los modelos cuánticos; además, gracias al modelo de orbitales moleculares, desarrollado en el siglo XX, se ha podido explicar la formación de enlaces de moléculas diatómicas (como la del oxígeno) y poliatómicas.

Limitaciones del modelo. La química cuántica se enfrenta en la actualidad a un doble desafío: el de liberarse de las aproximaciones en la mayor parte de los casos prácticos y el de resolver computacionalmente los sistemas cuánticos a gran escala. Debido a que la ecuación de Schrödinger no puede resolverse exactamente para sistemas con más de un electrón, han de emplearse métodos como la teoría de los orbitales moleculares y la teoría de la funcionalidad de la densidad (que se vale de procedimientos computacionales eficientes para calcular las propiedades moleculares). Dichos métodos proporcionan consistencia a la teoría, pero las aproximaciones introducen errores empíricos, lo que dificulta las predicciones.

Geología

En geología, los modelos formales se utilizan para representar procesos complejos como la tectónica de placas, la formación de minerales y la evolución de cuencas sedimentarias. Estos modelos se basan en ecuaciones diferenciales que describen el flujo térmico, la deformación rocosa y el transporte de sedimentos; incluyen simulaciones computacionales de la convección del manto, las placas tectónicas y las ecuaciones de deformación de la corteza terrestre (Fowler, 2005).

Análisis de los conceptos intervenientes:

Consistencia. La consistencia de los modelos geológicos se evalúa mediante su capacidad para reproducir las características observadas en la Tierra, como la distribución de los terremotos o la formación de montañas. La tectónica de placas, por ejemplo, es un modelo consistente y validado por la distribución de volcanes y terremotos.

Completitud. La completitud de los modelos geológicos es limitada debido a la heterogeneidad de los procesos geológicos y la escala temporal a la que ocurren. Las predicciones geológicas a menudo requieren de simplificaciones y suposiciones que pueden no captar todos los detalles relevantes.

Correspondencia con la realidad empírica. Los modelos geológicos han demostrado una correspondencia razonable con la realidad empírica. Por ejemplo, el modelo de la tectónica de placas ha sido fundamental para explicar la distribución de continentes y océanos, así como la ubicación de las cadenas montañosas y de los terremotos.

Limitaciones del modelo. Son varias: imposibilidad de observar directamente el interior de la Tierra, la sensibilidad de los modelos a los parámetros difíciles de medir y la escala temporal de los procesos geológicos, que dificulta la validación experimental a corto plazo.

Dinámica de poblaciones

La dinámica de poblaciones utiliza modelos matemáticos para describir cómo las poblaciones de organismos cambian con el tiempo bajo la influencia de factores como la natalidad, la mortalidad, la competencia por los recursos y la depredación. Estos modelos suelen formalizarse mediante ecuaciones diferenciales, como es el caso del modelo de Lotka-Volterra para la interacción depredador-presa (Murray, 2002).

Análisis de los conceptos interviniéntes:

Consistencia. La consistencia de los modelos de dinámica de poblaciones se evalúa mediante su capacidad para representar adecuadamente la evolución de las poblaciones en diferentes escenarios ecológicos. Aunque estos modelos pueden ser simplificaciones de la realidad, gracias a su consistencia interna, se pueden predecir tendencias generales en las poblaciones biológicas.

Completitud. Los modelos de la dinámica de poblaciones suelen ser incompletos debido a las simplificaciones a que han de ser sometidos para hacerlos manejables. Factores como la migración, la evolución genética y los cambios ambientales pueden complicar la capacidad de estos modelos para ser completamente predictivos.

Correspondencia con la realidad empírica. Los modelos de la dinámica de poblaciones se validan empíricamente comparando sus predicciones con los datos observacionales, como las fluctuaciones de las poblaciones de depredadores y presas. Aunque no siempre reflejan todos los detalles de la realidad, han sido instrumentos útiles para comprender los ecosistemas.

Limitaciones del modelo. Las limitaciones de la dinámica de poblaciones son, fundamentalmente, la sensibilidad a los parámetros

inciertos (dependientes de factores externos como la migración, la variabilidad ambiental y la evolución genética) y la falta de inclusión de interacciones complejas. Esto implica que, si bien los modelos de dinámica de poblaciones son consistentes, su correspondencia con la realidad empírica sólo es aproximada y requiere de ajustes constantes basados en la observación de datos.

Economía matemática

La economía matemática se sirve de modelos formales para analizar los fenómenos económicos. Estos modelos se basan en la teoría de juegos, las ecuaciones diferenciales y la teoría de la decisión; y se expresan en términos de funciones de utilidad, curvas de oferta y demanda y ecuaciones de equilibrio, como el modelo de equilibrio general de Arrow-Debreu (Varian, 2019).

Análisis de los conceptos intervenientes:

Consistencia. La consistencia de los modelos económicos depende de su capacidad para ofrecer explicaciones lógicas y coherentes de los fenómenos económicos observados, como la determinación de precios y la asignación de recursos. Sin embargo, estos modelos a menudo hacen supuestos simplificadores que pueden limitar su aplicabilidad.

Complejidad. Los modelos económicos suelen ser incompletos debido a la complejidad de las interacciones humanas y la incertidumbre inherente a la economía. Aunque pueden describir tendencias generales, la predicción exacta de los fenómenos económicos es rara vez posible.

Correspondencia con la realidad empírica. Los modelos económicos se enfrentan a retos difícilmente franqueables cuando se comparan con la realidad empírica, ya que los comportamientos humanos y las condiciones del mercado son extremadamente difíciles de modelar con precisión. Sin embargo, estos modelos son fundamentales para la toma de decisiones en política económica y para comprender el funcionamiento de las economías a gran escala.

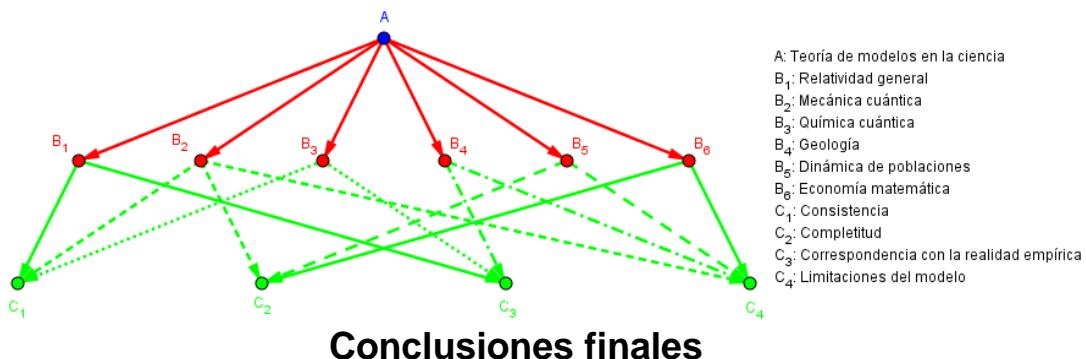
Limitaciones del modelo. La economía matemática tiene el inconveniente de que simplifica excesivamente la conducta humana y depende de supuestos ideales.

Derivaciones de los estudios de caso

Estos seis casos de estudio muestran la versatilidad y los límites de la teoría de modelos cuando se aplica a diversas disciplinas científicas. La teoría de modelos ofrece un marco valioso para formalizar y analizar las teorías. Sin embargo, cada disciplina se topa con sus propios obstáculos en términos de consistencia, completitud y correspondencia con la realidad empírica. En todos los casos, la validación empírica sigue siendo crucial para confirmar la utilidad de los modelos; y la teoría de modelos, a su vez, proporciona herramientas para evaluar estas correspondencias de manera rigurosa. La consistencia formal de una teoría, por añadidura, no siempre conlleva su validez empírica (a modo de síntesis de todo esto, véase la figura 3).

Figura 3: Relación entre la teoría de modelos y sus aplicaciones en la ciencia. Fuente: Elaboración propia.

Aunque las disciplinas analizadas son diversas, se aprecian en ellas ciertos patrones comunes. En primer lugar, todas ellas recurren a lenguajes formales para expresar sus principios fundamentales, lo que conduce a una estructuración del conocimiento que facilita el análisis de la consistencia y la completitud. En segundo lugar, cada campo se enfrenta al desafío de hacer que sus modelos sean representaciones fieles de la realidad. Por último, en todas las disciplinas analizadas se pueden identificar dificultades relacionadas con la incertidumbre, la sensibilidad a condiciones iniciales y la idealización de los modelos.



Resumen de los hallazgos más relevantes

Eficiencia en la formalización de las teorías científicas. La teoría de modelos ha demostrado ser efectiva en la formalización de las teorías científicas y ha aportado una mayor claridad y precisión en la definición de conceptos y relaciones. Esta formalización ha facilitado el desarrollo de unas teorías más coherentes y estructuradas, especialmente en disciplinas como la física y la matemática.

Evaluación de la consistencia y la completitud. La teoría de modelos ha sido fundamental en la evaluación de la consistencia interna de las teorías científicas, pues se ha cerciorado de que no haya contradicciones lógicas en el seno de un marco teórico determinado. Asimismo, la teoría de modelos ha contribuido a la discusión sobre la completitud de las teorías y ha hecho posible la identificación de lagunas y áreas que necesitan un mayor desarrollo.

Desafíos en la representación de la realidad. Aunque los modelos formales son utensilios poderosos, su capacidad para representar la realidad es limitada. Los modelos simplifican la realidad y, en algunos casos, pueden no captar toda la complejidad de los fenómenos estudiados, sobre todo en disciplinas en las que la realidad empírica es muy intrincada (biología y ciencias sociales, por ejemplo).

Tensiones entre consistencia formal y veracidad empírica. Una de las principales tensiones identificadas es la existente entre la consistencia formal de los modelos y su capacidad para representar la verdad empírica. Hay casos en los que los modelos formalmente consistentes no logran captar la realidad de manera precisa, lo que pone de relieve la necesidad de equilibrar la formalización matemática con la observación empírica.

Incompletitud y complejidad. Se ha demostrado que la incompletitud es una característica intrínseca a cualquier sistema formal, y que la complejidad de los sistemas naturales y sociales puede superar las capacidades de los modelos científicos. Este hallazgo agudiza la urgencia de desarrollar perspectivas más holísticas y multidisciplinarias para abordar la complejidad de esos sistemas naturales y sociales.

Implicaciones en la práctica científica

De los hallazgos de este informe se derivan algunas consecuencias en la práctica científica:

Cautela en la interpretación de los modelos. Dado que los modelos son simplificaciones de la realidad, los científicos han de ser cautelosos al interpretar los resultados derivados de aquéllos. Es fundamental reconocer los límites propios de cada modelo y evitar la sobreinterpretación de los mismos, especialmente si se trata de fenómenos complejos.

Importancia de la validación empírica. La tensión entre la consistencia formal y la veracidad empírica subraya la importancia de la validación experimental continua. Los modelos deben ser confrontados regularmente con los datos observacionales, con el fin de asegurar que siguen siendo representativos y útiles. La práctica científica, pues, debe mantener un equilibrio entre la formulación teórica y la validación experimental.

Necesidad de los enfoques multidisciplinarios. Los desafíos relacionados con la complejidad y la incompletitud sugieren que la ciencia no puede confiar únicamente en la teoría de modelos para resolver todos

los problemas prácticos. Es necesario, por lo tanto, adoptar perspectivas interdisciplinarias que combinen la matemática, la computación, la biología, la física y otras disciplinas para abordar los problemas científicos de manera integral.

Desarrollo de modelos flexibles y adaptativos. Para examinar la complejidad de los sistemas naturales y sociales, tal vez sea conveniente desarrollar modelos flexibles y capaces de adaptarse a la nueva información. Los modelos estáticos y rígidos pueden ser menos útiles en contextos en los que los sistemas cambian rápidamente o son altamente dinámicos.

Sugerencias para futuras investigaciones

Las investigaciones futuras podrían centrarse en las siguientes consideraciones:

Exploración de modelos híbridos. Investigar la viabilidad de los modelos híbridos que combinan diversos enfoques teóricos y empíricos para retratar la complejidad de los fenómenos naturales y sociales. Con el fin de lograr una representación más completa de la realidad, estos modelos podrían integrar en su seno elementos de la teoría de modelos con técnicas computacionales y estadísticas.

Mejorar la conexión entre modelos y datos empíricos. Acaso se podrían desarrollar métodos para fortalecer la conexión entre los modelos formales y los datos empíricos. Esto incluiría la creación de nuevas técnicas para la validación de los modelos, las cuales deberían ser más sensibles a las particularidades de los fenómenos observados y habrían de permitir una retroalimentación constante entre la teoría y la experimentación.

Desarrollo de herramientas computacionales avanzadas. Se podría fomentar el desarrollo de herramientas computacionales avanzadas para manejar eficazmente la complejidad de los modelos científicos. Estas herramientas deberían ser capaces de simular sistemas complejos, adaptarse a los cambios de forma instantánea y proporcionar una plataforma para la experimentación virtual.

Investigación sobre la completitud de las ciencias emergentes. Se podría explorar la completitud (o la incompletitud) de las áreas emergentes de la ciencia, como la biotecnología o la inteligencia artificial, en las que los modelos tradicionales pueden no ser suficientes para fotografiar la totalidad de los fenómenos. Estas investigaciones acaso podrían revelar nuevos aspectos de la completitud (o incompletitud) y sugerir vías innovadoras para reforzarla (o superarla).

Análisis crítico del grado de cumplimiento de los objetivos

Se estima que el informe cumple con los objetivos propuestos. Así, se ha llevado a cabo una exposición detallada de los fundamentos de la teoría de modelos, incluyendo conceptos clave, como satisfacibilidad,

completitud y consistencia (objetivo específico número 1). El informe ilustra, además, cómo los modelos semánticos pueden ayudar a garantizar la coherencia interna de las teorías científicas, si bien deja como posibles líneas de investigación futura el estudio de métodos computacionales que coadyuven a fortalecer el análisis (objetivo específico número 2). El informe contempla algunos estudios de caso en diversas disciplinas, dando cuenta de la relación entre consistencia formal y validez empírica (objetivo específico número 3). El informe reconoce las dificultades inherentes a la modelización de los fenómenos complejos, incluyendo la simplificación de la realidad y la dificultad de establecer correspondencias empíricas precisas; y se identifican barreras, como la incompletitud de algunos modelos y la insuficiencia de ciertos formalismos, a la hora de representar los sistemas dinámicos (objetivo específico número 4). En el informe se plantean propuestas de posibles mejoras futuras en la aplicación de la teoría de modelos (objetivo específico número 5).

De todo ello se desprende que se ha cumplido con el objetivo general del informe: “analizar cómo la teoría de modelos puede contribuir a la evaluación de la consistencia y la completitud de las teorías científicas”.

Reflexiones finales

La teoría de modelos es un instrumento indispensable para la ciencia moderna, pero sería deseable tomar conciencia de sus límites y desafíos. En este informe se ha demostrado que, aunque la teoría de modelos aporta una estructura poderosa para formalizar y evaluar las teorías científicas, no siempre puede capturar toda la complejidad del mundo real ni garantizar la verdad empírica. En consecuencia, la ciencia debería seguir evolucionando y adoptar enfoques cada vez más integrados y multidisciplinares; y acaso debería desarrollar modelos más robustos y flexibles.

Por añadidura, la teoría de modelos no es un fin en sí misma, sino un medio para avanzar en la comprensión del mundo. Al reconocer sus propias limitaciones y buscar maneras de superarlas, los científicos pueden continuar utilizándola como un instrumento valioso mientras exploran nuevas fronteras del conocimiento. La ciencia del futuro, con toda probabilidad, será una ciencia basada en la solidez matemática, pero también una ciencia abrazada a la complejidad y la incertidumbre, a la vez que adaptada a un mundo en constante cambio.

Referencias bibliográficas

- Alberts, B., Johnson, A., Lewis, J. Raff, M. Roberts, K. & Walter, P. (2014). *Biología molecular de la célula*. Buenos Aires: Editorial Médica Panamericana.

- Birkhoff, G. & von Neumann, J. (1936). The logic of quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, 37 (4), 823-843.
- Borzacchini, L. (2018). *Introducción a la lógica matemática*. Madrid: Trotta.
- Button, T. & Walsh, S. (2018). *Philosophy and Model Theory*. Oxford: Oxford University Press.
- Carnap, R. (1956). *Significado y necesidad: Un estudio de la semántica y de la lógica modal*. Buenos Aires: Espasa-Calpe.
- Chang, C. C. & Keisler, H. J. (1990). *Model Theory*. Amsterdam: North-Holland.
- Dirac, P. A. M. (1958). *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford: Oxford University Press.
- Enderton, H. B. (2001). *Mathematical Introduction to Logic*. San Diego: Academic Press.
- Fowler, C. M. R. (2005). *The Solid Earth: An Introduction to Global Geophysics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physic*, 38, 173-198.
- Green, M. B., Schwarz, J. H. & Witten, E. (2012). *Superstring Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Griffiths, D. J. & Schroeter, D. F. (2018). *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hawking, S. & Ellis, G. F. R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hawking, S. (2001). *El universo en una cáscara de nuez*. Barcelona: Editorial crítica.
- Hodges, W. (2006). *Model Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kay, J. (2015). *Other People's Money: Master of the Universe or Servants of the People?* London: Profile Books.
- Kitano, H. (2002). *Foundations of Systems Biology*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Kunen, K. (1980). *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Amsterdam: North-Holland.
- Levine, I. N. (2020). *Quantum Chemistry*. Hoboken, NJ: Pearson.
- Manzano, M. (1996). *Teoría de modelos*. Madrid: Alianza Editorial.

- Marker, D. (2002). *Model Theory: An Introduction*. New York: Springer-Verlag.
- Mukhanov, V. (2005). *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology: An Introduction*. Berlin: Springer-Verlag.
- Nielsen, M. A. & Chuang, I. L. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Penrose, R. (2004). *El camino a la realidad: Una guía completa de las leyes del universo*. Madrid: Editorial Debate.
- Peskin, M. E. & Schroeder, D. V. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. Reading MA: Addison-Wesley.
- Rehead, M. (1980). *Modelos en la ciencia y la lógica*. Madrid: Alianza Editorial.
- Suppes, P. (2002). *Representation and Invariance of Scientific Structures*. Buenos Aires: Amorrortu Ediciones.
- Tarski, A. (1956). *Logics, Semantics, Mathematics: Papers from 1923 to 1938*. Oxford: Clarendon Press.
- Väänänen, J. (2011). *Models and Games*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Varian, H. R. (2019). *Microeconomic Analysis*. New York, NY: W. W. Norton & Company.
- Weinberg, S. (1995). *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Will, C. M. (2018). *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge: Cambridge University Press.